这门课程，包括线性方程组、矩阵、行列式、向量、二次型方程，它们仿佛是五颗颜色不同的宝石，线性代数将它们串在一起。当你完成学习会发现不同数学问题里隐约存在的共性，当你用不同的角度去解读同一个问题，也许会像我一样惊叹数学体系里殊途同归一致性的浪漫。我们会从你最熟悉的线性方程组开始，不必刻意去记忆那些红色标注的定理，而是去理解它们，让它们成为你想法里的一部分，just enjoy it :)

一、 线性方程组

核心目标：
熟悉利用阶梯型化简来求解线性方程组（包括齐次、非齐次）；
熟悉方程组的解的情况（唯一解、无解、无数解）；
了解有关矩阵的核心理念——秩；
了解求解方程组与向量组合之间的关系，掌握线性相关、线性无关的理念。

首先认识什么是线性方程：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = b$$

可以通过下面表格做一个更清楚地认识：

方程	是否为线性方程
$3x + 4 = 0$	是
$\frac{2x+3y}{5} = 7$	是
$7x_1 + 100x_2 = 50$	是
$\sqrt{x} + y = 1$	不是
$x + y^2 + 3z = 2$	不是
$3\sin y = 1$	不是

关于线性方程组，主要分为两大类：齐次线性方程组和非齐次线性方程组，见下图：

齐次方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$$

右侧全部为0

非齐次方程组

$$\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 5x+y-z=2 \\ -x+2y-2z=0 \end{cases}$$

右侧不全为0

注意，下列这种方程组也是非齐次的（记得把常数移到右边）：

$$\begin{cases} 3x+2y+z+2=0 \\ 2x+y-z-1=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$$

对五种情况进行逐个举例了解：

1. 齐次方程组只有唯一解

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

2. 齐次方程组有无数多解

$$\begin{cases} 3x+6y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 非齐次方程组只有唯一解

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

4. 非齐次方程组有无数多解

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases} \Rightarrow x=5-3y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5-3k \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. 非齐次方程组无解

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=6 \end{cases} \text{无解}$$

1.1 利用阶梯型化简进行方程组求解

以上这些都是 2 个未知数，两个方程，尚且属于简单的情况，如果遇到三个、四个变量或者更多的变量与方程，该如何处理呢？接下来为大家介绍线性代数中最重要的运算能力：**行化简**。以一个 3×3 的方程组（3 个方程组，3 个自变量）为例：

方程组视角	矩阵视角
$\begin{cases} x+3y+2z=6 & ① \\ 2x+9y+5z=17 & ② \\ -x+3y+2z=8 & ③ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 5 & 17 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$
②−2 ×①	第二行减去 2 倍的第一行
$\begin{cases} x+3y+2z=6 & ① \\ 0+3y+1z=5 & ② \\ -x+3y+2z=8 & ③ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

③+①	第三行加上 1 倍的第一行
$\begin{cases} x+3y+2z=6 & ① \\ 0+3y+1z=5 & ② \\ 0+6y+4z=14 & ③ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{bmatrix}$
③−2 ×②	第三行减去 2 倍的第二行
$\begin{cases} x+3y+2z=6 & ① \\ 0+3y+1z=5 & ② \\ 0+0y+2z=4 & ③ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x+3y+2z=6 \\ 2x+9y+5z=17 \\ -x+3y+2z=8 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 5 & 17 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

被消除的变量　　处理为0的位置

矩阵的初等行变换包括以下几种操作：
① 将其中的第i行乘以任意一个非零常数c（记为$r_i \times c$）；
② 将两行进行互换位置（记为$r_i \leftrightarrow r_j$）；
③ 将某行乘以一个非零常数c后加到另一行（记为$r_i + cr_j$）。

阶梯型矩阵是矩阵的一种类型。一个矩阵称为阶梯形（或行阶梯形），需满足以下性质：
① 如果某行元素全部为 0，则它应该出现在矩阵的最下方；
② 从第二行开始，每行从左侧均应以 0 元素作为起始元素，并且从左向右第一个不为 0 的元素被称为“主元”，主元所在的列（自上而下）应当是严格递增的。

基于以上三种变换，然后将矩阵化**从左向右、从上往下**为阶梯型矩阵，即可帮助完成方程组求解。同样的，对于四变量四方程的情况也类似：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=8 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=7 \\ x_1+5x_2+3x_3-x_4=-7 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=6 \end{cases}$$

对应矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

系数矩阵　　增广矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2&2&3&8\\2&1&3&2&7\\1&5&3&-1&-7\\4&-2&3&0&6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&8\\0&3&1&4&9\\0&0&5&-4&-12\\0&0&0&1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\\x_3=0\\x_4=3\end{cases}$$

将下列方程组改写为矩阵的形式，并予以求解：

$$\begin{cases}2x+1y+2z=0\\4x+2y+3z=2\\x+2y+2z=1\end{cases}$$

在行化简这个矩阵时，会遇到下面这种情况：

$$\begin{bmatrix}2&1&2&0\\0&0&-1&2\\0&\frac{3}{2}&1&1\end{bmatrix}$$

这时明显不能用第二行去消元第三行，需要换行操作。其实刚好的方案是在最开始就将第三行与第一行互换位置。

解得：$x=1,y=2,z=-2$

将下列方程组改写为矩阵的形式，并予以求解：

$$\begin{cases}x+y+2z=1\\2x-y+3z=2\\x-2y+z=1\end{cases}$$

对应化简后的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&3&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

一个矩阵通过阶梯型行变换后，此时矩阵中不全为 0 的行数，定义为秩，矩阵$\boldsymbol{A}$的秩记为$r(\boldsymbol{A})$。行变换不会改变矩阵的秩。通过对系数矩阵的秩的观察，我们可以了解到，方程组真正有效的方程的个数。

这个增广矩阵的秩为 2，这也表明，虽然方程组里出现了 3 条方程，但实际上有效的方程只有 2 个，所以x、y、z中有一个变量可以作为自由变量。我们将矩阵还原为方程组：

$$\begin{cases}x+y+2z=1\\3y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\dfrac{5}{3}k\\y=-\dfrac{k}{3}\\z=k\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-5\\-1\\3\end{bmatrix}$$

将下列方程组改写为矩阵的形式，并予以求解：

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x-2y+z=3 \end{cases}$$

对应的矩阵在阶梯型变换后成为了：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩是 3，但是该方程组无解，因为最后一行得出了这样一个结果：

$$0x+0y+0z=1$$

该方程组无解。

系数矩阵的秩<增广矩阵的秩，则该方程组无解。

将下列方程组改写为矩阵的形式，并予以求解：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=14 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=2 \\ 4x_1+8x_2-x_3+6x_4=8 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 14 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

该矩阵通过阶梯型化简后的结果为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩=系数矩阵的秩，可见该方程组有解，而该秩小于变量个数，所以有无数多解。为了写出解，**我们将每一行第一个非零数字的位置称之为“主元”。**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于x_2、x_4对应的列不存在主元，所以应当优先选择这两个作为自由变量：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{10}{3}-2x_2-\dfrac{5}{3}x_4 \\ x_3=\dfrac{16}{3}-\dfrac{2}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{10}{3} \\ 0 \\ \dfrac{16}{3} \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如果非齐次方程组存在无数多解，则方程组中自由变量的个数 = 变量个数n − 系数矩阵的秩$r(A)$。

判别 $AX=\beta$ 解的情况用三个数：未知数个数n, $\mathrm{r}(A)$, $\mathrm{r}(A\mid\beta)$.

（1）无解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$.
（2）有唯一解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}) = n$.
（3）有无穷多解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}) < n$.
方程的个数 m 虽然在判别公式中没有出现，但它是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 的上界，因此当 $\mathrm{r}(A) = m$ 时，$AX = \boldsymbol{\beta}$ 一定有解。当 $m < n$ 时，一定不是唯一解.

求解下面两个齐次方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5k}{3} \\ y = -\dfrac{k}{3} \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

齐次方程组的行化简过程是类似的，但是有几点不同：
① 齐次方程组一定有解，所有未知数取 0 就可解，这种解称之为“零解”；
② 除了零解，齐次方程组还可能存在无数个非零解，遵从“自由变量的个数 = 变量个数 — 系数矩阵的秩”

判别$AX = 0$解的情况用两个数：$n, \mathrm{r}(A)$. $\mathrm{r}(A) = n$（即A列满秩）$\Leftrightarrow AX = 0$只有零解（即：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n \Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = 0$有非零解）。
关于方程组的解，分为下列情况：

- 线性方程组
  - 齐次方程组
    - 唯一解（零解）　秩＝变量数
    - 无数多解　秩＜变量数
  - 非齐次方程组
    - 唯一解　秩＝变量数 ｝系数矩阵的秩＝增广矩阵的秩
    - 无数多解　秩＜变量数 ｝系数矩阵的秩＝增广矩阵的秩
    - 无解　系数矩阵的秩＜增广矩阵的秩

另外我们也要注意，在系数矩阵相同的情况下，我们要关注齐次方程组和非齐次方程组的解之间的“联动效果”：
比如非齐次方程组的解：

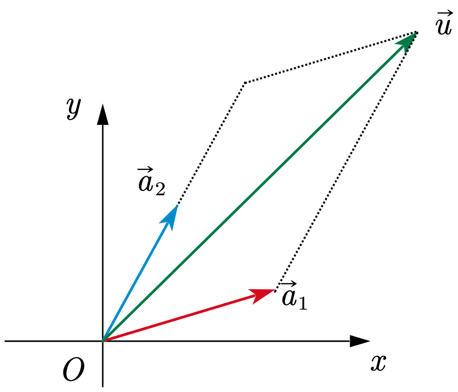
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ \frac{16}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

而齐次方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 4x_1+8x_2-x_3+6x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.2　方程组与向量组

最常见的向量空间就是二维向量所处的平面和三维所处的立体空间。



我们知道，在平面中，只要有两个不平行的向量，那么任何向量都可以被这两个向量通过系数相加表示出来：

$$\vec{u}=m\vec{a}_1+n\vec{a}_2$$

二维向量 $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，而向量$\vec{c}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$是如何用前两个向量组合表示的？设 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$，则对应有：

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-2y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

所以得知：$1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$

此时平面中的任何一个向量都可以由$\vec{a},\vec{b}$所表示，这样两个向量可以作为这个平面的一组基（或者基底）。

通过上述计算，我们可以得知，$\vec{c}$在基$\{\vec{a},\vec{b}\}$下的坐标为$(1,-2)$.

给出三个三维空间里的向量：$\overrightarrow{a_1}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\overrightarrow{a_2}=\begin{bmatrix}-1\\1\\5\end{bmatrix},\overrightarrow{a_3}=\begin{bmatrix}-3\\-5\\1\end{bmatrix}$，设$\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，求出相应系数$x,y,z$：

$$x\overrightarrow{a_1}+y\overrightarrow{a_2}+z\overrightarrow{a_3}=\vec{b}$$

列出方程组：

$$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ 3x+y-5z=2 \\ 2x+5y+z=4 \end{cases}$$

该增广矩阵经过阶梯型化简后为：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

该方程组无解。我们用向量的角度来看待这个问题：其本质原因在于，如果在空间中选取三个三维向量，让他们能够线性表示出空间中的所有向量，前提是它们不能共面。$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$这三者是共面的，因为：

$$\overrightarrow{a_3}=-2\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$$

这时我们称$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$这三个向量是线性相关的。

n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即存在数组 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}.$$

设有n个向量，$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$，如果存在不全为 0 的系数$k_1,k_2\cdots k_n$，使得：

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=0$$

这时我们称这个n个向量是线性相关的。

反之，如果只有$k_1,k_2\cdots k_n$全为 0 时才能使上等式成立，则称该向量组是线性无关的。

n个向量组成的向量组A：$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$，将其组成一个矩阵$[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}]$，该矩阵的秩代表了该向量组所能线性表示的空间维数。

向量组：$\overrightarrow{a_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\-1\end{bmatrix},\overrightarrow{a_2}=\begin{bmatrix}-2\\0\\-6\\2\end{bmatrix},\overrightarrow{a_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\3\end{bmatrix},\overrightarrow{a_4}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-8\\5\end{bmatrix}$，判断这四个向量所能线性表示的维数，求出最大无关组。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该向量矩阵的秩为 2，只有两个线性无关向量，由于主元位置存在于$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_3}$，所以在这四个变量中，这两个向量就是该向量组的最大无关组即可。

最大无关组：设有向量组A，如果能在其中选出r个向量组成向量组A_0：$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_r}$，满足：

（1）$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_r}$是线性无关的；

（2）向量组A中任意向量都能由A_0中的向量来表示，

这时我们称A_0:$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_r}$为向量组$A$的最大无关组。

求最大无关组的方法：将向量形成的矩阵进行阶梯型行化简，主元所处的位置对应的向量位置即为最大无关组。

由此我们对于方程组的理解进入了非常重要的结论：

n行n个变量的方程组		
方程组的解	矩阵层面的解释	向量层面的解释
齐次方程组有唯一解（即零解）	系数矩阵的秩$=n$。有多少变量就有多少条有效方程，所以每个变量必须锁定唯一的取值。	向量组是线性无关的，必须系数全取 0 才有可能获得 0 向量。
齐次方程组有无数解	系数矩阵的秩$<n$。有效方程不足变量的数目，所以有若干变量成为自由变量。	向量组是线性相关的，想要获得 0 向量，可以有无数种组合搭配方案。
非齐次方程组有唯一解	系数矩阵的秩$=n$。有多少变量就有多少条有效方程，所以每个变量必须锁定唯一的取值。	向量组是线性无关的，n条向量能够完整、唯一地表达n维空间中的任何一个向量。
非齐次方程组有无数解	系数矩阵的秩$<n$，方程组中有的方程是“无效”的，导致有的变量可以作为自由变量。	向量组是线性相关的，n条向量只能表示小于n维的空间，并且在该空间内的任何一个向量都可以获得无数多种组合搭配。
非齐次方程组无解	系数矩阵的秩$<n$，方程组中有的方程是“矛盾”的，导致不可能有解。	向量组是线性相关的，n条向量只能表示小于n维的空间，无法表示超出表示范围的向量。

1.3　线性方程组解的特点

关于齐次方程组：

如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一组解，则它们的任何线性组合$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\eta}$也都是解。

如果齐次方程组$AX=0$有非零解，则它的解集J（全部解的集合）是无穷集，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是$AX=0$的基础解系时：

如果向量$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX}=0$的解$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\eta}$可用$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$线性表示，.

于是，$AX=0$的通解为：

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\eta}_s, c_i\text{任意}$$

设$AX=0$有n个未知数，它的基础解系中包含解的个数为$s=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

于是判别一组向量$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是$AX=0$的基础解系的条件为

（1）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是$\boldsymbol{AX}=0$的一组解.

（2）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$线性无关.

（3）$s=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

关于非齐次方程组：

如果$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一组解，则

$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\xi}_s$也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解$\Leftrightarrow$ $c_1+c_2+\cdots+c_s=1$；

$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\xi}_s$是$\boldsymbol{AX}=0$的解$\Leftrightarrow c_1+c_2+\cdots+c_s=0$。
$AX=\boldsymbol{\beta}$的两个解的差一定是$AX=0$的解.
如果$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个解，$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX}=0$的解，则：$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$是$AX=\boldsymbol{\beta}$的解.
如果$\boldsymbol{\xi}_0$是非齐次方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是$\boldsymbol{AX}=0$的基础解系，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解（一般解）为$\boldsymbol{\xi}_0+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\eta}_s$，其中$c_1,c_2,\cdots,c_s$，可取任何常数.
当非齐次方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有解时，其解集的秩为$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$。

已知$(1,a,2)^{\mathrm{T}},(-1,4,b)^{\mathrm{T}}$构成齐次线性方程组

$$\begin{cases} sx_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-tx_2-2x_3=0 \end{cases}$$

的一个基础解系，求a,b,s,t.

此齐次线性方程组的基础解系包含 2 个解，未知数有 3 个，则系数矩阵

$$\begin{bmatrix} s & 1 & -2 \\ 2 & -t & -2 \end{bmatrix}$$

的秩为 1，立刻得到$s=2,t=-1$. 于是方程组为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

$(1,a,2)^{\mathrm{T}},(-1,4,b)^{\mathrm{T}}$代入，得$a=2,b=1$.

$\boldsymbol{AX}=0$ 和 $\boldsymbol{BX}=0$ 都是 n 元方程组，下列说法正确的是（　）.
（A） $\boldsymbol{AX}=0$ 和 $\boldsymbol{BX}=0$ 同解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 。
（B） $\boldsymbol{AX}=0$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.
（C） $\boldsymbol{AX}=0$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.
（D） $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Rightarrow \boldsymbol{AX}=0$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解.

【答案】 C
$\boldsymbol{AX}=0$ 和 $\boldsymbol{BX}=0$ 同解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ ，但 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 推不出 $\boldsymbol{AX}=0$ 和 $\boldsymbol{BX}=0$ 同解，排除A。（可以举反例说明，非常容易）
$\boldsymbol{AX}=0$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解集合 $\subseteq \boldsymbol{BX}=0$ 的解集合，于是 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ ，即$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. C 对，B 不对.
$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 推不出 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解集合 $\subseteq \boldsymbol{BX}=0$ 的解集合，D 不对.

设（I）和（II）是两个四元齐次线性方程组，（I）为

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$$

（II）有一个基础解系$(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 求（I）和（II）的全部公共解.

【答案】
方法一：构造一个线性方程组（III），使得它也以$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$为基础解系（冒充方程组（II））。于是（III）和（II）同解，从而（I）和（II）的公共解也就是（I）和（III）的公共解，可以解（I）和（III）的联立方程组来求得一例如（III）可以是：

$$\begin{cases} x_2-x_3=0 \\ x_1+x_4=0 \end{cases}$$

求（I）和（II）的全部公共解，就意味着解它们共同成立的方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_1+x_4=0 \end{cases}$$

该方程组的解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

方法二：（I）和（II）的公共解都必定是（II）的解。（II）的解可以写为如下格式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1+2c_2 \\ c_1+2c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

它又满足（I），由此可决定c_1与c_2应该满足的条件．将该解代入（I），得到

$$\begin{cases} -c_2+c_1+2c_2=0 \\ c_1+2c_2-c_2=0 \end{cases}$$

解出$c_1+c_2=0$．即当$c_1+c_2=0$时，该解成为（I）的解．代入$c_2=-c_1$，于是（I）和（II）的公共解为：

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ -c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

其中c_1可取任意常数．

二、 矩阵运算

核心目标：
掌握矩阵的运算基础（加减、数乘、矩阵乘法、n 次幂），以及分块矩阵；
能够利用初等行变换，将矩阵变形为单位阵，进而求得逆矩阵；
学会解矩阵方程；
了解“可逆”意味着哪些结论。

2.1 矩阵的运算

2.1.1 矩阵的加减、数乘、乘法

① 矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相加减，需要两个矩阵行列数相同，然后在对应位置处逐个进行加减即可；
② 矩阵$\boldsymbol{A}$与某个常数$\boldsymbol{c}$相乘，就是矩阵中的每个数与常数$\boldsymbol{c}$相乘。

一个$\boldsymbol{i}$行$\boldsymbol{j}$列的矩阵$\boldsymbol{A}$，与一个$\boldsymbol{j}$行$\boldsymbol{k}$列的矩阵$\boldsymbol{B}$相乘，结果得到一个$\boldsymbol{i}$行$\boldsymbol{k}$列的矩阵$\boldsymbol{C}$。矩阵$\boldsymbol{C}$中第$\boldsymbol{a}$行第$\boldsymbol{b}$列的元素，是由矩阵$\boldsymbol{A}$中第$\boldsymbol{a}$行的元素，与矩阵$\boldsymbol{B}$第$\boldsymbol{b}$列的元素对应相乘后相加的结果。矩阵$\boldsymbol{A}$的列数必须与矩阵$\boldsymbol{B}$的行数相等。

⭐矩阵与矩阵之间的乘法：以下面两个矩阵相乘为例：

$$\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-2\\6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+6\times3&-2\times2+3\times3\\1\times1+6\times4&-2\times1+4\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&5\\25&10\end{bmatrix}$$

比如矩阵$\boldsymbol{A}$为(3×2)，而矩阵$\boldsymbol{B}$大小为(2×4)，则只能有$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，　$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$不成立.

$$\begin{bmatrix}1&0\\3&2\\-1&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&5&4&2\\1&3&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&4&2\\8&21&8&6\\0&1&-8&-2\end{bmatrix}$$

矩阵乘法遵从以下规律：

（1）结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

（3）分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

（4）没有交换律，即不一定有$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$；

（5）注意，$(A+B)^2$不一定是$A^2+2AB+B^2$，而且$(A+B)(A-B)$不一定是A^2-B^2，除非已经知道$AB=BA$.

（6）矩阵相乘后转置：$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

2.1.2　分块矩阵

在矩阵中，可以利用横线、竖线切割，将一个矩阵切割为若干矩阵：

$$\left[\begin{array}{c|c|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\hline a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{13}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}\end{bmatrix}$$

矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$之间进行运算时，可以将两者分别分块后再运算，但是要遵循以下规则：

（1）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$之间相加减时，对矩阵$\boldsymbol{A}$的切分方式要与$\boldsymbol{B}$的切分方式一致；

（2）对于$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，可以将两个矩阵分别分块后再做乘法，对矩阵$\boldsymbol{A}$的列切分方式要与$\boldsymbol{B}$的行切分方式一致。

比如：

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&4\\2&1&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\3&1\end{bmatrix}=[A_1\ \ A_2]\times\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}=[A_1B_1+A_2B_2]$$

$$A_1B_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\\2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\8&-2\\4&-2\end{bmatrix}$$

$$A_2B_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\5\end{bmatrix}\times[3\ \ 1]=\begin{bmatrix}-3&-1\\12&4\\15&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[A_1B_1+A_2B_2]=\begin{bmatrix}2&-2\\20&2\\19&3\end{bmatrix}$$

2.1.3　上（下）三角矩阵

形如以下类型的叫做上三角矩阵（位于主对角线下方的元素全部为 0）：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

以下类型的叫做下三角矩阵（位于主对角线上方的元素全部为 0）：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

两个上三角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 还是上三角矩阵；并且 $\boldsymbol{AB}$ 对角线元素就是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应对角线元素的乘积.
上三角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的方幂 $\boldsymbol{A}^k$ 与多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 也都是上三角矩阵；并且 $\boldsymbol{A}^k$ 的对角线元素为 a_{11}^k ， $a_{22}^k,\cdots,a_{nn}^k;f(A)$ 的对角线元素为 $f(a_{11}),f(a_{22}),\cdots,f(a_{nn})$ ．（$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素.）

2.2　单位矩阵与初等行变换

2.2.1　单位矩阵的定义

对于一个n阶方阵，其对角元素全部为 1，其他元素全部为 0，这样的方阵我们称之为单位矩阵（用字母$\boldsymbol{I}$或者$\boldsymbol{E}$来表示）。

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵在矩阵中的作用类似于自然数“1”，它乘以任何n阶方阵都不会改变这个矩阵（不论左乘还是右乘）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.2　初等行变换与阶梯型化简

初等行变换	初等列变换

将两行对换位置（$\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j}$）	将两列对换位置（$\boldsymbol{c_i \leftrightarrow c_j}$）
数$\boldsymbol{k(k \neq 0)}$乘以一行中的所有元（$\boldsymbol{r_i \times k}$）	数$k(k \neq 0)$乘以一列中的所有元（$\boldsymbol{c_i} \times k$）
将某一行乘以$\boldsymbol{k}$倍对应加到另一行（$\boldsymbol{r_i + kr_j}$）	将某一列乘以k倍对应加到另一列（$\boldsymbol{c_i} + k\boldsymbol{c_j}$）

如果矩阵A通过初等变换变成矩阵B，那么我们称两个矩阵是等价的；
对单位矩阵进行一次初等行变换或者列变换，这样的矩阵称之为初等矩阵；
设A是一个$m \times n$阶矩阵，对A实施一次初等行变换，等效于在其左侧乘以相应的m阶初等矩阵；
设A是一个$m \times n$阶矩阵，对A实施一次初等列变换，等效于在其右侧乘以相应的n阶初等矩阵。

如果对单位矩阵进行行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第2行加上2倍第1行，第3行减3倍第1行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将这个新的矩阵左乘以任意某个 3 阶方阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ -3a+h & -3b+i & -3c+j \end{bmatrix}$$

等效于对这个矩阵进行相同的行变换。

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，有 $BA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ -a_{31}+2a_{11} & -a_{32}+2a_{12} & -a_{33}+2a_{13} \end{bmatrix}$，求矩阵$B$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1, -1 \times r_3, r_3 + 2r_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ -a_{31}+2a_{11} & -a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1, -1 \times r_3, r_3 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

2.2.3 矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 就是其行（列）向量组的秩.
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的非 0 子式的阶数的最大值.（即 $\boldsymbol{A}$ 的每个阶数大于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 的子式的值都为 0 ，但是 A 有阶数等于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 的非 0 子式。）

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则

$$0 \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{Min}\{m, n\}$$
$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = 0$$

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩的.（即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关）
当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩的。（即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关）
对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ ，则行满秩和列满秩是一样的，此时就称 $\boldsymbol{A}$ 满秩。于是：
n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵秩的性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$$
$$\begin{cases} \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \\ \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}. \end{cases}$$

当A可逆时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$；当$\boldsymbol{B}$可逆时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.
*如果$\boldsymbol{A}$列满秩，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$；如果$\boldsymbol{B}$行满秩，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.
再拓展：

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}([\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}]) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$$

接下来要掌握有关分块矩阵的秩的结论：

广义初等行变换（舒尔公式）：
（1）将分块矩阵某一行左乘一矩阵加到另一行上，秩不变；
（2）将分块矩阵某一列右乘一矩阵加到另一列上，秩不变。

如下的秩公式成立：

$$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$$

$r([A \quad AB]) = r(A)$：因为可看作第二列减去第一列右乘 B；

$r([A \quad BA]) \neq r(A)$：比如$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则有$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

$r\left(\begin{bmatrix} A \\ BA \end{bmatrix}\right) = r(A)$：因为可看作第二行减去第一行左乘 B；

$r\left(\begin{bmatrix} A \\ AB \end{bmatrix}\right) \neq r(A)$。

2.3　逆矩阵

设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，请问如何将其变为一个单位矩阵？

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘以}\frac{1}{2}\text{，第3行加1倍第1行}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

该操作等效于为矩阵$\boldsymbol{A}$左乘一个同样变换后的单位矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

这里我们称 “$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{bmatrix}$” 为矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，记为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

如果两个n阶方阵有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则称$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$两个矩阵互为逆矩阵，记为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&-2\\-2&-6&6\\1&2&-6\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

讲矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}_3$并排放在一起，$\boldsymbol{E}_3$要与$\boldsymbol{A}$进行相同的行变换，如果将矩阵$\boldsymbol{A}$通过行变换逐步转化为单位矩阵，这时$\boldsymbol{E}_3$就变成了$\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix}1&4&-2&1&0&0\\-2&-6&6&0&1&0\\1&2&-6&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{②+2\times①}\begin{bmatrix}1&4&-2&1&0&0\\0&2&2&2&1&0\\1&2&-6&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-①}\begin{bmatrix}1&4&-2&1&0&0\\0&2&2&2&1&0\\0&-2&-4&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{③+②}\begin{bmatrix}1&4&-2&1&0&0\\0&2&2&2&1&0\\0&0&-2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+③}\begin{bmatrix}1&4&-2&1&0&0\\0&2&0&3&2&1\\0&0&-2&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{①-③}\begin{bmatrix}1&4&0&0&-1&-1\\0&2&0&3&2&1\\0&0&-2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-2\times②}\begin{bmatrix}1&0&0&-6&-5&-3\\0&2&0&3&2&1\\0&0&-2&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{②\times\frac{1}{2},\ ③\times\frac{-1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&0&-6&-5&-3\\0&1&0&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&3&7\\3&7&15\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix}1&2&4&1&0&0\\1&3&7&0&1&0\\3&7&15&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&4&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&0&-2&-1&1\end{bmatrix}$$

这时停下来，我们发现，矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 2，它是不可能通过行变换成为单位矩阵的，所以它不可逆，即不存在逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$。对于一个n阶方阵而言，其可逆的充要条件是该方阵是满秩的（秩为n）。

利用逆矩阵求解方程组：

$$\begin{cases}x+3y+2z=6\\2x+9y+5z=17\\-x+3y+2z=8\end{cases}\quad（已知\begin{bmatrix}1&3&2\\2&9&5\\-1&3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{5}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}）$$

该方程可以理解为矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\2&9&5\\-1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\17\\8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&9&5\\-1&3&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\17\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{5}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\17\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$，且有$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$是三阶单位矩阵，求$\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，请：

（1）证明：矩阵$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$是可逆矩阵；

（2）矩阵$B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵$A$.

（1）证明：设$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}$，代入可得：

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$$
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$$

因此可知，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$是可逆的，其逆矩阵为$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$

（2）

$$B-E=\begin{bmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A=E+(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}$，求$\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}$$

用初等变换法解此基本矩阵方程：

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\mid 2\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-2&5&-1&6&-10&2\\-1&2&0&2&-2&0\\1&0&-1&-2&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&0&4\\0&1&-1&2&-6&2\\0&2&-1&0&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&0&4\\0&1&-1&2&-6&2\\0&0&1&-4&10&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-6&10&4\\0&1&0&-2&4&2\\0&0&1&-4&10&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-6&10&4\\-2&4&2\\-4&10&0\end{bmatrix}.$$

方阵 A 可逆的充要条件是其与单位矩阵行等价。

乘法中保持秩：如果$\boldsymbol{A}$可逆，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AB}$ 可逆，并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},c\boldsymbol{A}(c\neq 0)$ 和 $\boldsymbol{A}^k$ 都可逆，并且

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},(c\boldsymbol{A})^{-1}=c^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},(\boldsymbol{A}^k)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$$

三、 行列式

核心：
掌握行列式的基本运算规则（包括余子式、代数余子式）；
掌握行列式的初等行变换，以及它与矩阵之间的区别；
熟悉各种常见的行列式简化计算操作；
掌握有关逆矩阵的相关知识：伴随矩阵；
了解克莱默法则；
熟悉行列式的值与矩阵的秩、方程组的解之间的关联。

3.1 行列式的初等运算

行列式规定了一种运算规则，比如下面这个 2 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

注意，矩阵的符号是“[ ]”、“{ }”或者“( )”，而行列式采用的是“| |”
为了计算 3 阶（3 行 3 列）或者更高阶的行列式，我们需要了解两个概念：余子式、代数余子式
以一个三阶行列式为例：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

余子式M_{ij}：分别删去原来的行列式中的第i行与第j列，剩余元素所组成的行列式的值；
代数余子式A_{ij}：根据i,j的取值情况，与余子式之间为相等或者相反数关系，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$。

比如：$M_{21} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$，$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$

计算一个行列式，取其中任意一行（或一列），让该行的每一个元素乘以对应位置的代数余子式，然后求和相加，就是该行列式的值。比如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{按照第一行展开}}{=} 1\times(0-5)+2\times(20-0)+4\times(2+4)=59$$

$$\overset{\text{按照第三行展开}}{=} 4\times(10+4)+1\times(8-5)=59$$

对于任意的n阶行列式，有以下几条规则：
(1) 行列式经过转置后，其值不变；
(2) 行列式当中的两行对换位置，其值取相反数；
(3) 把行列式中的某一行乘以某个倍数加到另外一行，行列式的值不变；
(4) 一个常数c乘以行列式，相当于行列式当中的某一行中的每个数乘以该常数c（注意不是整个行列式乘以该常数）。
推论：如果行列式中有两行（或两列）对应成比例，则此行列式的值为 0.

对于上三角或者下三角行列式，其值即为对角元素之积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times a_{44}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33}$$

在计算行列式时，可以尝试将行列式变换为上三角或者下三角类型：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 35$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -25 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -75$$

求四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

本题涉及到 4 阶行列式，利用代数余子式的方法直接计算，则工作量较大且容易出错，我们尝试利用变换的方法进行处理：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 4r_2]{r_3 + 3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - \frac{3}{2}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

此时，对于上三角行列式，其值等于对角元素之积，可得答案为 10.

对于行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，记 A_{ij} 为它的第 i 行第 j 列的代数余子式，求 $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34}$.

题目所求的恰是第三行对应元素的代数余子式。而事实上：第三行的代数余子式恰

恰与第三行本身的元素无关。我们所求的$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$本质上可以看作如下行列式的值（将原行列式的第三行换为1、1、1、1）：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

而这个行列式的第2行、第3行成比例，所以它的值为0.

设$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$是其中元素$a_{ij}$的余子式，则$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

这等效于计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3 & 4 \\ x & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & \dfrac{x}{3} & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2x \end{vmatrix}$，其展开结果中的$x^4$的系数是？

答案：为取出x^4，分别从第一行到第四行取出第2、1、3、4个元素，乘积为$\frac{4}{3}x^4$，而“2134”的逆序数为1，所以对应的结果为

$$(-1)^1\frac{4}{3}x^4=-\frac{4}{3}x^4$$

系数为$-\frac{4}{3}$。

设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & (x-2) & 4 \\ (x+1) & -2 & 1 & 3 \\ 4 & (2x-1) & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & x \end{vmatrix}$，其展开结果中的$x^4$以及$x^3$的系数是？

与上一题同理，我们为了能够形成x^4以及x^3，分别从第一行到第四行取出第3、1、2、4个元素，乘积为$(x-2)(x+1)(2x-1)x$，而“3124”的逆序数为2，所以对应的结果为

$$(-1)^2(x-2)(x+1)(2x-1)x$$

从中取出的x^4为$2x^4$；从中取出的x^3为$(-2\times2+1\times2-1\times1)x^3=-3x^3$。
所以系数分别为2和-3.

3.2 特殊行列式的计算

（行叠加型）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

每一行都是a与$(n-1)$个b所构成的，这种结构我们将第 2 行至第n行全部加至第一行，然后提取系数到行列式外，再进行消b：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

（递推型）求行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

将行列式按第一行展开：

$$D_5=(1-a)D_4+aD_3$$

则有：

$$D_5+aD_4=D_4+aD_3=D_3+aD_2=D_2+aD_1=1 \quad ①$$
$$D_5-D_4=-a(D_4-D_3)=a^2(D_3-D_2)=-a^3(D_2-D_1)=-a^5 \quad ②$$

$①+a\times②$：

$$(1+a)D_5=1-a^6$$

如果$a=-1$：根据①式可知，$D_5=1+D_4=1+(1+D_3)=\cdots=6$

如果$a\neq-1$：$D_5=\dfrac{1-a^6}{1+a}$

（范德蒙德行列式）求行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$

根据范德蒙德行列式计算规律，$D=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

3.3　行列式与方程组的关系（克莱默法则）

以一个二元方程组为例：

$$\begin{cases}3x+2y=5\\5x+7y=6\end{cases}$$

系数矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&7\end{pmatrix}$，将其中第 1 列、第 2 列分别替换为方程中等号右侧常数列，则为：

$$B_1=\begin{pmatrix}5&2\\6&7\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}3&5\\5&6\end{pmatrix}$$

根据克莱默法则：

$$x_1=\frac{|B_1|}{|A|}=\frac{23}{11},\ x_2=\frac{|B_2|}{|A|}=\frac{-7}{11}$$

对于n个变量n个方程：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

其有唯一解的充要条件为系数矩阵的行列式不为零：

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

将其中的第i列替换为$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}$，则得到新的行列式$|\boldsymbol{B}_i|$

而其中对应的未知数x_i的值为：

$$x_i=\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$$

3.4 行列式与矩阵的关系

方阵$\boldsymbol{A}$对应的行列式记为$|\boldsymbol{A}|$，其有以下性质：
(1) 对于两个n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$：$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
(2) $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

在计算逆矩阵时，可以借助行列式、代数余子式进行处理：
矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$；
定义伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^*$是将矩阵$\boldsymbol{A}$中每个位置的代数余子式求出后进行转置，即

$A^* = \left(A_{ij}\right)^T$；

逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

$$|\boldsymbol{A}| = -18 + 3 \times 7 = 3 \neq 0$$

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 15 & -3 & -18 \\ -7 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & -3 & -18 \\ -7 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

已知 4 阶矩阵A的行列式为$|A| = 5$，求出$|A^{-1}|, |A^*|$

解：$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$，而$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$，$A^* = |A|A^{-1} = 5A^{-1}$，$|A^*| = 5^4|A^{-1}| = 5^3 = 125$

有关伴随矩阵相关的公式：
(1) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ （即使A不可逆，也有这条公式）；
(2) $|A^*| = |A|^{n-1}, (A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$；
(3) $(cA)^* = c^{n-1}A^*$
(4) $(AB)^* = B^*A^*$
(5) $(A^k)^* = (A^*)^k; (A^*)^* = |A|^{n-2}A$
矩阵A与其伴随矩阵A^*的秩有如下精确关系：
对于$n \times n$矩阵 A：
- 若$r(A) = n$，则$r(A^*) = n$
- 若$r(A) = n-1$，则$r(A^*) = 1$
- 若$r(A) < n-1$，则$r(A^*) = 0$

当 A 满秩时，伴随矩阵也满秩；当 A 只缺一个秩时，伴随矩阵降为秩 1；当 A 缺两个或更多秩时，伴随矩阵变为零矩阵。

这个关系背后的原因是伴随矩阵的元素是 A 的$(n-1)$阶子式，所以伴随矩阵的秩

直接反映了A的子式结构。

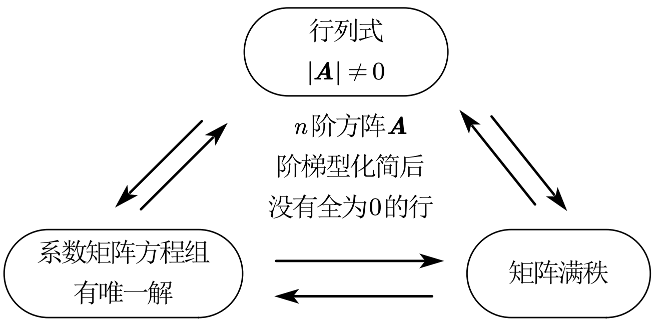
怎样理解有关伴随矩阵的秩的结论：

比如矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&3&0\end{bmatrix}$，它的阶梯型化简结果为$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，因为要研究秩的问题，我们直接看阶梯型化简后的$A$的伴随矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{伴随矩阵}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^T$$

显然它的秩为 1.

对于一个n阶方阵，如果它的秩是n，则称该方阵为满秩。一个方阵A满秩的充要条件是$|A|\neq 0$。



四、 向量组

核心目标：
用向量重新认识矩阵的乘法；
学习基底变换的方法；
掌握正交基的特点，以及如何进行施密特正交化。

4.1 线性相关、线性无关

我们在第一章就了解有关线性相关性的内容，在这里提供一些总结和提高：

如果存在不全为 0 的一组数 $c_1,c_2,\cdots,c$ ，使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$$

则说 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，否则就说它们线性无关。（即要使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ ，必须 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 全为 0 。）

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ ，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 有非零解（无非零解）.

性质：

（1）一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$（个数 $s=1$ ）线性相关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=0$.

（2）两个向量相关 $\Leftrightarrow$ 它们的分量对应成比例.

（3）线性无关向量组的每个部分组（子集）都无关.

（4）若向量的个数 s 等于维数 n ，则：

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性相关 } \Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$$

（5）当向量的个数 s 大于维数 n 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定线性相关.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为向量组，以下结论正确的是（ ）。

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则一定有两个向量成比例

（B）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中一定有零向量

（C）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则任意一个向量均可以由其余向量线性表示

（D）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则一定有一个向量可以由其余向量线性表示

答案：D

假设有n个n维向量：$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$，其下说法是等价的：
（1）这些向量是线性无关的；

（2）$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$可以唯一确定地表示出任意$n$维向量$\vec{b}$；

（3）矩阵$A=[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}]$的秩为$n$；
（4）行列式$|A|=|\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}|$不等于 0.

对于两个向量组，$A:\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_r},B:\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\cdots,\overrightarrow{b_m}$. 如果两个向量组可以相互线性表示，则两个向量组被称之为等价的。

4.2 向量与矩阵乘法的关系

设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$是$\boldsymbol{V}$的一个基，则$\boldsymbol{V}$的每个元素$\boldsymbol{\alpha}$都可以用$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$唯一线性表示：

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{\eta}_k,$$

称其中的系数$c_1,c_2,\cdots,c_k$为$\boldsymbol{\alpha}$关于基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$的坐标，它是一个$k$维向量。

矩阵乘法可以看作对向量的某种搭配组合。

向量组$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$是线性无关的，如果有另外三个向量分别为：$\overrightarrow{b_1}=\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_2}=3\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_3}=-\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_3}$，请利用$\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$线性表示出$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$.

解：根据题目信息可知：

$$\vec{b}_1=\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\ \vec{b}_2=\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right]\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix},\ \vec{b}_3=\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right]\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

于是有：

$$\left[\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right]=\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right]\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&3&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right]=\left[\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right]\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&3&0\\1&-1&2\end{bmatrix}^{-1}=\left[\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right]\begin{bmatrix}\frac{6}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

由此可知：$\vec{a_1}=\frac{6}{7}\vec{b}_1+\frac{4}{7}\vec{b}_2-\frac{1}{7}\vec{b}_3,\vec{a_2}=\frac{1}{7}\vec{b}_1+\frac{3}{7}\vec{b}_2+\frac{1}{7}\vec{b}_3,\vec{a_3}=\frac{3}{7}\vec{b}_1+\frac{2}{7}\vec{b}_2+\frac{3}{7}\vec{b}_3$

4.3　向量与方程组的关系

方程组求解可以理解为向量式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_v\boldsymbol{\alpha}_v=\boldsymbol{\beta}$（齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_v\boldsymbol{\alpha}_v=0$ ）.

对于方程组：

$$\begin{cases}x+3y+2z=6\\2x+9y+5z=17\\-x+3y+2z=8\end{cases}$$

我们可以理解为，在三维空间中存在四个向量

$$\vec{a_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\vec{a_2}=\begin{bmatrix}3\\9\\3\end{bmatrix},\vec{a_3}=\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix}6\\17\\8\end{bmatrix}$$

试求前 3 个向量的系数，从而组合得到向量$\vec{b}$.我们也可以将方程组写为矩阵的形式：

$$[\vec{a}_1\ \vec{a}_3\ \vec{a}_3]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\vec{b}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1&3&2\\2&9&5\\-1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\17\\8\end{bmatrix}$$

方程组的求解，可以认为是求某个向量$\vec{b}$在一组指定基底中的坐标。

已知 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 又设$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$的通解。

【答案】$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$，用向量方程形式写出为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

其对应齐次方程为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$$

条件$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$说明$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解.

$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$说明$(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$是齐次方程的一个非零解. 又从$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关和$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 得到$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，从而齐次方程的基础解系只含$4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$个解，从而$(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$为基础解系。$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+c(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$c$可取任意数.

如果$\boldsymbol{AB}=0$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n, n$为$\boldsymbol{A}$的列数($\boldsymbol{B}$的行数)。

如何理解：当$AB=0$时，B 的所有列向量都必须“躺在”A 的零空间里

如果$AB=0$，设B的列向量为$b_1,b_2,\dots,b_{\mathrm{k}}$，那么：

$$\begin{aligned} Ab_1 &= 0 \\ Ab_2 &= 0 \\ &\cdots \\ Ab_{\mathrm{k}} &= 0 \end{aligned}$$

这说明B的每一个列向量都是A的零向量解。

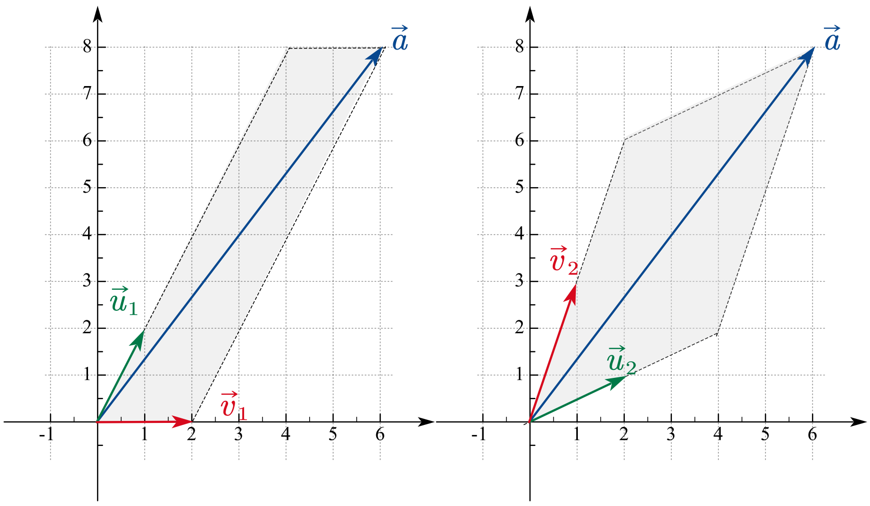
A是$m\times n$矩阵，它的零空间维数 $=n-r(A)$；

B的列空间维数 $=r(B)$。

$r(B)\le A$的零空间维数$=n-r(A)$

$$r(A)+r(B)\le n$$

4.4 基变换（仅数学一）



如图，设空间中有一个向量$\vec{a}=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}$，请：

（1）求出其在基底$\overrightarrow{u_1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\overrightarrow{v_1}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$下的坐标

（2）求出其在基底$\overrightarrow{u_2}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\overrightarrow{v_2}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$下的坐标

（3）已知一个向量$\vec{b}$在基底$\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\}$下的坐标为$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，即：$\vec{b}=x_1\overrightarrow{u_1}+y_1\overrightarrow{v_1}$，请求出其在基底$\{\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}\}$中的坐标$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$

解：（1）对应方程组：

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

（2）对应方程组：

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+3y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

（3）根据对基底和坐标的理解，我们可以得到

$$[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

所以可知：

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = [\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}]^{-1}[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

这时候$[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}]^{-1}[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}]$这个矩阵，就实现了将基底$\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\}$下的坐标转化至基底$\{\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}\}$下的坐标。

过渡矩阵，坐标变换公式

设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$和$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$都是$\boldsymbol{V}$的一个基，并设$\boldsymbol{\xi}_i$在$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$中的坐标为$(c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{ki})$，构造矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

称$\boldsymbol{C}$为$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$到$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$的过渡矩阵。它也就是向量组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$对于$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$的表示矩阵。

可以利用矩阵分解的工具，用矩阵乘法写出过渡矩阵和两个基的关系：

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k) = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)\boldsymbol{C}$$

如果$\boldsymbol{V}$中向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$和$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$中的坐标分别为$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2,\cdots,y_k)^{\mathrm{T}}$，即有$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)\boldsymbol{x}$，并且

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}.$$

于是有坐标变换公式：$x = Cy$.

完成以下有关基变换题目：

（1）设二维平面中的向量$\vec{a}(2,1),\vec{b}(1,3)$，以这两个向量为基，求出二维平面中的向量$(x,y)$在这组基下的坐标；

（2）设二维平面中的向量$\vec{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，以这两个向量为基，求出二维平面中的向量$(x,y)$在这组基下的坐标；

（3）设一组基$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$，以及另一组基$\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$，已知它们之间的关系为：

$$\begin{cases}\vec{b_1}=\vec{a_1}+2\vec{a_2}\\ \vec{b_2}=\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}\\ \vec{b_3}=\vec{a_2}+\vec{a_3}\end{cases}$$

一个向量v在基$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$中的坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，在基$\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$中的坐标为$(y_1,y_2,y_3)$，请给出$(x_1,x_2,x_3)$与$(y_1,y_2,y_3)$之间的**过渡矩阵**。

（1）根据基和坐标的特点，我们可得，在基$\vec{a}(2,1),\vec{b}(1,3)$下的坐标如果是$(m,n)$，则有：

$$\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3x-y}{5}\\ \frac{-x+2y}{5}\end{bmatrix}$$

（2）根据基和坐标的特点，我们可得，在基$\vec{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$下的坐标如果是$(m,n)$，则有：

$$\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}x+y}{2}\\ \frac{-x+\sqrt{3}y}{2}\end{bmatrix}$$

（3）向量v在基$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$中的坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，在基$\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$中的坐标为$(y_1,y_2,y_3)$，所以：

$$\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

而我们通过题目已知：

$$\begin{cases}\vec{b}_1=\vec{a}_1+2\vec{a}_2\\ \vec{b}_2=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3\\ \vec{b}_3=\vec{a}_2+\vec{a}_3\end{cases}\Rightarrow[\vec{b}_1\quad\vec{b}_2\quad\vec{b}_3]=[\vec{a}_1\quad\vec{a}_2\quad\vec{a}_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

将此代入上面一行，则得到：

$$[\vec{a}_1\quad\vec{a}_2\quad\vec{a}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[\vec{a}_1\quad\vec{a}_2\quad\vec{a}_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

所以$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$是从基$\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$中的坐标来转变成基$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$中的坐标的过渡矩阵。

进而则有：

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$是从基$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$中的坐标来转变成基$\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$中的坐标的过渡矩阵。而这个矩阵恰恰表明：

$$\begin{cases}\vec{a}_1=-\frac{1}{2}\vec{b}_2+\frac{1}{2}\vec{b}_3\\ \vec{a}_2=-\vec{b}_1+\frac{1}{2}\vec{b}_2-\frac{1}{2}\vec{b}_3\\ \vec{a}_3=\vec{b}_1-\frac{1}{2}\vec{b}_2-\frac{1}{2}\vec{b}_3\end{cases}$$

4.5 正交基与施密特正交化

内积：在n维的向量空间中的两个向量$\vec{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\vec{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$，两个向量之间的内积记为$(\vec{a},\vec{b})$：

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n][b_1,b_2,\cdots,b_n]^T=a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n$$

如果两个向量内积为 0，则称它们是正交的。

一个向量的长度：$||\vec{a}|| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$

正交向量的应用价值：在平面有两个线性无关的向量$\vec{a},\vec{b}$，它们可以作为平面的一组基底，它们可以线性表示平面中任意向量$\vec{c}$：

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

若要求得坐标$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，需要求解相应的方程。而如果$\vec{a},\vec{b}$是相互正交的（在几何意义上是垂直的），则可以用另一种方式求得坐标：

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$左右两侧都点乘$\vec{a}$，可得：$\vec{c}\cdot\vec{a} = x\vec{a}\cdot\vec{a} + y\vec{b}\cdot\vec{a}, x = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

同理可知：$y = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}$

正交基：设n维向量$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_m}$是一组基底，如果它们两两正交，则称该组基底为正交基；另外，如果每个向量都是单位向量，即每个向量与自身的内积都为 1，则该基底为标准正交基。

验证向量$\vec{a_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \vec{a_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \vec{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$组成标准正交基，并且求出向量$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$在该组基底下的坐标。

解：

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2} = 0, \vec{a_2}\cdot\vec{a_3} = 0, \vec{a_1}\cdot\vec{a_3} = 0$$
$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_1} = 1, \vec{a_2}\cdot\vec{a_2} = 1, \vec{a_3}\cdot\vec{a_3} = 1$$

由此可知，满足标准正交基的条件。

设$\vec{b} = x\vec{a_1} + y\vec{a_2} + z\vec{a_3}$

$$x = \vec{b}\cdot\vec{a_1} = \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}, y = \vec{b}\cdot\vec{a_2} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}, z = \vec{b}\cdot\vec{a_3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$$

标准正交基所组成的矩阵$A = [\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}]$，其逆矩阵等于它的转置，即$A^T = A^{-1}$。

原因比较简单，$A^TA = \begin{bmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vec{a_2}^T \\ \vec{a_3}^T \end{bmatrix}[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}] = \begin{bmatrix} \vec{a_1}\cdot\vec{a_1} & \vec{a_1}\cdot\vec{a_2} & \vec{a_1}\cdot\vec{a_3} \\ \vec{a_2}\cdot\vec{a_1} & \vec{a_2}\cdot\vec{a_2} & \vec{a_2}\cdot\vec{a_3} \\ \vec{a_3}\cdot\vec{a_1} & \vec{a_3}\cdot\vec{a_2} & \vec{a_3}\cdot\vec{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

施密特正交化：设$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_m}$是向量空间$V$中的一组基底（不是正交基），为了能够求出空间$V$中的一组正交基，可以采用如下操作：

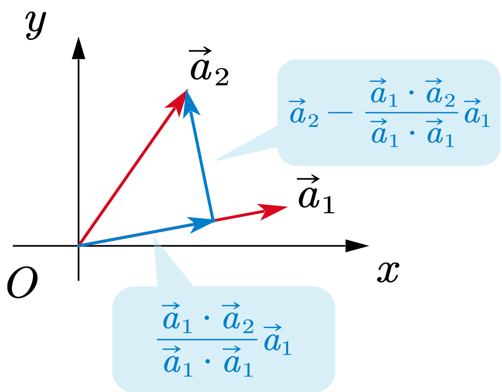
$$\vec{b}_1=\overrightarrow{a_1}$$

$$\vec{b}_2=\overrightarrow{a_2}-\frac{\vec{b}_1\cdot\overrightarrow{a_2}}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{b}_1$$

$$\vec{b}_3=\overrightarrow{a_3}-\frac{\vec{b}_1\cdot\overrightarrow{a_3}}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{b}_1-\frac{\vec{b}_2\cdot\overrightarrow{a_3}}{\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2}\vec{b}_2$$

……

$$\vec{b}_m=\overrightarrow{a_m}-\frac{\vec{b}_1\cdot\overrightarrow{a_m}}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{b}_1-\frac{\vec{b}_2\cdot\overrightarrow{a_m}}{\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2}\vec{b}_2-\cdots-\frac{\vec{b}_{m-1}\cdot\overrightarrow{a_m}}{\vec{b}_{m-1}\cdot\vec{b}_{m-1}}\vec{b}_{m-1}$$



在三维空间里有两个向量$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$,$\vec{v}=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}$，请找到$\vec{u},\vec{v}$所处平面中的一对正交向量。

设$\vec{a}_1=\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$,$\vec{a}_2=\vec{v}-\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{v}}{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1}\vec{a}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}-\frac{11}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{9}\\\frac{14}{9}\\-\frac{22}{9}\end{bmatrix}$

五、 特征值与特征向量

核心目标：
熟练计算特征值和特征向量；
掌握特征值和特征向量的一些性质；
掌握一个矩阵可相似对角化的条件，以及如何相似对角化。

5.1 求特征值与特征向量

设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零列向量x可以成立关系式：

$$Ax=\lambda x$$

则数λ称为矩阵A的特征值，列向量x被成为矩阵A的特征向量。

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$的特征值与特征向量

设$Ax=\lambda x$，则有：

$$(A-\lambda E)x=0$$

其中：

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{pmatrix}$$

而x作为一个 2 维非零向量，为使得这个齐次方程组有非零解，$(A-\lambda E)$是不满秩的，对应有$|A-\lambda E|=0$：

$$(3-\lambda)^2-1=0$$
$$\lambda_1=2,\lambda_2=4$$

对应$\lambda_1=2$,则有:$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$,$(A-\lambda E)x=0$对应有$x=k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,取$\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$即可。

对应$\lambda_2=4$，则有：$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，$(A-\lambda E)x=0$对应有$x=k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，取$\vec{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$即可。

所以，矩阵A的特征值是 2 和 4，对应的特征向量分别是$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

求矩阵$B=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$的特征值与特征向量

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\2&2-\lambda&-2\\-2&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)$$

对应的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

对应$\lambda_1=\lambda_2=0,(B-\lambda E)x=0$，$\vec{\xi}_1=k\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

对应$\lambda_3=4,(B-\lambda E)x=0$，$\vec{\xi}_2=k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

关于特征值的重要结论：

(1) 对于n阶方阵A，其应当存在n个特征值（包括重根、复数根的情况）；

(2) 特征值之和等于A的对角线元素之和，其特征值之积等于行列式$|A|$；

(3) $k\lambda$是kA的特征值，λ^n是A^n的特征值；

(4) A是可逆矩阵⇔0 是A的特征值；

(5) 如果A是可逆矩阵，则λ^{-1}是A^{-1}的特征值，$\frac{|A|}{\lambda^{-1}}$是A^*的特征值，并且A、A^{-1},A^*的特征向量完全一致；

(6) A与A^T有相同特征值，AB与BA有相同特征值；

(7) 由A的多项式形成的新的矩阵$F(A)=\sum_{i=0}^{n}k_iA^n$，其特征值为$F(\lambda)=$

$\sum_{i=0}^{n} k_i \lambda^n$；

已知 3 阶方阵A的特征值有$1,-2,3$，求
（1）$|A|$以及方阵A的对角线之和；
（2）A^{-1}和A^*的特征值；
（3）设$B=3A^2+4A+6E$，求B的特征值。

答案：（1）$|A|=1\times(-2)\times 3=-6$，对角线之和为 2；

（2）A^{-1}的特征值为$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，由于$A^*=|A|A^{-1}$，所以$A^*$的特征值为$-6,3,-2$.

（3）$B=F(A)=3A^2+4A+6E$，于是$F(\lambda)=3\lambda^2+4\lambda+6$，将$1,-2,3$分别代入可知：

$$F(1)=13, F(-2)=10, F(3)=45$$

所以B的特征值为$13,10,45$.

设λ是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则它的重数$\geqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$.

不等式右侧的“$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$”看似很生疏，其实就是在求对应的特征向量时所产生的自由解的个数。上述这个不等式可以这样理解：如果$r=a$是 2 重根，则其所产生的特征向量最多有 2 个。

如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 1,(n>1)$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$。

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$，所以 0 是$\boldsymbol{A}$的特征值，并且根据定理 5．4，特征值 0 的重数$\geqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant n-1$．即$A$的特征值中至少有$n-1$个是 0．又根据定理 5.3 的（2），另外一个特征值为$\mathrm{tr}(A)$.

5.2 相似矩阵与对角化

设A、B是两个n阶矩阵，如果存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称两个矩阵相似，记为$A\sim B$.
两个相似矩阵的特性：
（1）具有相同的秩；
（2）具有相同的特征值；
（3）具有相同的行列式；
（4）具有相同的迹（对角线元素之和）；
（5）两个矩阵的逆矩阵、转置矩阵、伴随矩阵都对应相似。

注意，以上特性是两个矩阵相似的必要条件，而不是充要条件。

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&b\end{bmatrix}$，已知两个矩阵相似，求参数$a,b$。

两个矩阵相似，可知它们对角线之和相等：

$$2+a=5+b$$

此外，它们的行列式相等：

$$|A|=-2, |B|=2(3b+8)$$

由此得：$a=0,b=-3$。

如果n阶矩阵A满足以下条件之一

（1）有n个线性无关的特征向量$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_n$；

（2）对于每个特征值λ_i，其重数等于$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})$（这句话可以理解为，如果一个值是$k$重根，它需要有对应的$k$个特征向量）；

则此时，矩阵A可以与一个特定的对角矩阵相似：

$$A=[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_n]^{-1}$$

注意：式中λ_i是$\vec{\xi}_i$对应的特征值。

这种操作也被称之为对矩阵A进行相似对角化。

设矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$是一个对角阵。

解答：首先求矩阵A的特征值λ：

$$|A-\lambda E|=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ -3 & -6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(\lambda-4)(5+\lambda)+18]=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$$

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$：

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{\xi}=k_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

所以对应特征值 1，可以找到两个线性无关的特征向量：$\vec{\xi_1}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$与$\vec{\xi_2}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

对于特征值$\lambda_3=-2$：

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ -3 & -6 & 3\end{bmatrix},\vec{\xi}=k\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

所以对应特征值-2，可以找到特征向量：$\vec{\xi_3}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

将三个线性无关的特征向量组合成矩阵P：

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

此时$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

矩阵$A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，设$X=\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\end{bmatrix}$，求$A^5X$。

根据相似对角化可知：

$$A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$A^5=\left(P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}P^{-1}\right)$$

$$A^5=P\begin{bmatrix}1^5&0&0\\0&1^5&0\\0&0&(-2)^5\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}34&66&0\\-33&-65&0\\-33&-66&1\end{bmatrix}$$

$$A^5X=\begin{bmatrix}34&66&0\\-33&-65&0\\-33&-66&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

对于矩阵$B=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$，能否实现相似对角化？

该矩阵的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \overrightarrow{\xi_1}=k\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$\lambda_3=4,\overrightarrow{\xi_2}=k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

由于无法找到3个线性无关的特征向量，因此该3阶矩阵不能进行相似对角化。

六、 二次型

核心目标：
掌握实对称矩阵的特点，熟悉它与二次型函数之间的关联；
掌握惯性指数和正定、负定的特性；
能够解决合同问题、标准化问题、正定问题。

6.1 实对称矩阵特征

如果一个由实数构成的方阵$A(a_{ij})$，其元素均满足$a_{ij}=a_{ji}$，则称其为实对称矩阵。实对称矩阵，在特征值与特征向量方面有以下几个特点：
（1）特征值全部为实数，n重特征值对应有n个线性无关的特征向量；
（2）不同特征值的特征向量是正交的；
（3）A的特征向量可以形成单位正交基。

将矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$进行相似对角化

$$|A-\lambda E|=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&-2-\lambda&4\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

于是对应的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$，
$\lambda_1=\lambda_2=2$对应的特征向量求解：

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix},\vec{\xi}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\lambda_3=-7$对应的特征向量求解：

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix},\vec{\xi}=k\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

所以可以得到：

$$A=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\1&0&-2\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&-1\\1&0&-2\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

但是在这个题目中，我们可以凑出三个相互正交的特征向量：利用施密特正交化

$$\vec{a_1}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\vec{a_2}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix},\vec{a_3}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

$$\frac{a_1}{|a_1|}=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{bmatrix},\frac{a_2}{|a_2|}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix},\frac{a_3}{|a_3|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&-\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{5}}{5}&0\\\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{\sqrt{5}}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

接下来我们解释为什么“实对称矩阵的不同特征值的特征向量是正交的”。

设 v_1 和 v_2 是对应于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量. 为证明 $v_1 \cdot v_2 = 0$ ，计算

$$\begin{aligned}\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 &= (\lambda_1\boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2 = (A\boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2\\ &= (\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{v}_2)\\ &= \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{v}_2)\\ &= \lambda_2\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\end{aligned}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，所以 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$.

一个n阶方阵A，如果存在$P^{-1}AP = B$，其中B是对角矩阵，而P是正交矩阵，则此时我们称A是可以“正交对角化”的。
而方阵A可以实现正交对角化的充要条件就是它是对称矩阵。

矩阵A与它的转置A^T相乘，其秩不变：$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$

怎样理解？用二次型来解释：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$看作一个齐次方程组，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是另一个方程组，如果两个方程组的解系有相同的维数（自由变量一样多），就意味着两个矩阵（$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}$）的秩相同。而事实上：

$$A^TAx = 0\text{与}Ax = 0\text{有相同的解！}$$

①如果$Ax = 0$，则此时一定有$A^TAx = 0$（无需论证）；
②如果$A^TAx = 0$，则我们等号两侧均乘以x^T，则有：

$$x^TA^TAx = 0$$
$$(Ax)^TAx = 0$$

Ax是一个向量，此时它与自身点乘为 0，意味着它就是 0 向量，也就是$Ax = 0$。

6.2 二次型方程的标准化

n元的二次型是n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的齐二次多项式函数，一般形式为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n +\\ &\quad a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n +\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n^2\\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j.\end{aligned}$$

称其中含x_i^2的项为平方项，称含$x_ix_j(i \neq j)$的项为交叉项.
它可以用矩阵乘积的形式写出：构造对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

记$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

称$\boldsymbol{A}$为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵，称$\boldsymbol{A}$的秩为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩.

标准二次型：交叉项的系数都为 0 的二次型，也就是矩阵为对角矩阵的二次型。
规范二次型：形如$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 \cdots - x_{n+m}^2$的二次型。

分别用配方法、正交变换的方法，将下列二次型为标准型
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

方法一：配方法 配方法的思想是通过恰当的线性变换，逐步配成完全平方式。

$$f = [x_1 + x_2 - x_3]^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 5x_3^2$$

令线性变换：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

则标准型为：

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2$$

方法二：正交变换法 正交变换法需要求出系数矩阵A的特征值和正交的特征向量。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第一步：求特征值 计算特征多项式：

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

（本题计算特征值和特征向量非常麻烦，我们直接给出近似数值结果）

特征值分别为：-1.2143、1.5392、2.6751。

矩阵的特征向量矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0.5207 & -0.7392 & -0.4271 \\ -0.3971 & 0.2332 & -0.8877 \\ 0.7558 & 0.6318 & -0.1721 \end{bmatrix}$$

特征值对应的对角矩阵为：

$$D = \begin{bmatrix} -1.2143 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5392 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6751 \end{bmatrix}$$

可以将A进行相似对角化：

$$A = PDP^{-1}$$

对应有：

$$\begin{cases} y_1 = 0.5207x_1 - 0.7392x_2 - 0.4271x_3 \\ y_2 = -0.3971x_1 + 0.2332x_2 - 0.8877x_3 \\ y_3 = 0.7558x_1 + 0.6318x_2 - 0.1721x_3 \end{cases}$$

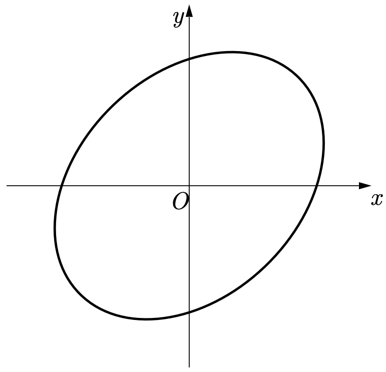
则该方程化为：

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = -1.2143y_1^2 + 1.5392y_2^2 + 2.6751y_3^2$$

两种方法得到的标准型在惯性指数上是一致的。

配方法更直接简便，而正交变换法理论上更完整，但计算较为复杂。

问题：方程$3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1$对应怎样的曲线图像？



我们用矩阵来理解这件事情

$$3x^2+3y^2-2xy=[x\ y]\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

记$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$，而根据对角化理论我们可以得到：

（1）求得A的特征值与特征向量：4 和 2，对应的特征向量分别为$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

（2）将特征向量进行单位正交化：$\begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$

（3）$A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

于是可知：

$$[x\ y]\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[x\ y]\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

如果我们定义：

$$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v\end{cases}$$

则该方程为：

$$3x^2+3y^2-2xy=1\to 4u^2+2v^2=1$$

（惯性定理）一个二次型 f 所化得的标准二次型虽然不唯一，但是它们的平方项的系数中，正的个数和负的个数是由 f 确定的．一个二次型所化得的规范二次型在形式上是唯一的，称为其规范形。

把二次型 f 所化得的标准二次型的平方项的系数中，正的个数和负的个数分别称为 f的正惯性指数和负惯性指数。实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正（负）惯性指数就是它的正（负）特征值的个数。

两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ ，如果存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同。以下三个说法为等价的：

（1）两个二次型可以用可逆线性变量替换互相转化；
（2）两个二次型它们是实对称矩阵合同；
（3）两个实对称矩阵的正（负）特征值的个数都相等。

如果一个二次型对应的矩阵为A，则二次型的特征有：
（1）正定的：如果A的特征值全为正数；
（2）负定的：如果A的特征值全为负数；
（3）不定的：如果A的特征值有正有负。

已知二次型$f(x,y,z)=4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz$
（1）求出对应的二次型矩阵表达式
（2）求出对应矩阵的特征值和特征向量
（3）将二次型通过坐标转换变为标准型
（4）判断该二次型属于正定/负定/不定的哪一种

解答：

（1）$4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz=[x\ y\ z]\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix}$的特征值分别为$1,6,-6$，相应特征向量分别为$\overrightarrow{\xi_1}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},\overrightarrow{\xi_2}=\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix},\overrightarrow{\xi_3}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

（3）将单位向量进行正交化，分别为$\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$,

对应转换过程为：$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$

即：

$$\begin{cases}x=-\dfrac{2}{\sqrt5}u+\dfrac{1}{\sqrt{30}}v+\dfrac{1}{\sqrt6}w\\y=0u+\dfrac{5}{\sqrt{30}}v-\dfrac{1}{\sqrt6}w\\z=\dfrac{1}{\sqrt5}u+\dfrac{2}{\sqrt{30}}v+\dfrac{2}{\sqrt6}w\end{cases}$$

则此二次型可换为：

$$4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz=u^2+6v^2-6w^2$$

（4）由于特征值有正有负，所以该二次型是不定的。

（1）实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的正惯性指数等于其阶数n.

（2）实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的特征值都是正数.
（3）实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵。
（4）实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$。
把实对称矩阵左上角的r阶子矩阵的行列式称为其r阶顺序主子式。n阶实对称矩阵A有n个顺序主子式，其中 1 阶的为a_{11}, n阶的为$|A|$。
实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式全大于 0.