

1 矩阵运算

题 1.1 (2021 年 2, 3) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和上三角可逆矩阵

$\mathbf{Q}$, 使 $\mathbf{PAQ}$ 为对角矩阵, 则 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 可分别为 ().

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

答案: C

【考查点】矩阵乘法: 左乘“经过变形后的单位矩阵”代表行变换 (重复行变形的操作), 右乘“经过变形后的单位矩阵”代表列变换 (重复列变形的操作)。

题 1.2 (2024 年 2, 3) 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则

$\mathbf{A} = ()$.

A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

答案: C

题 1.3 (2022 年 2, 3) 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵, 交换 $\mathbf{A}$ 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加

到第 1 列, 得到矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^{-1}$ 的迹 $\text{tr}(\mathbf{A}^{-1}) =$

答案: -1

【考察点】逆向操作即可。

题 1.4 (2025 年 2) 下列矩阵中, 可以经过若干次初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

答案：B

题 1.5(2022 年 1) 设 $A, E-A$ 可逆, 若 B 满足 $[E-(E-A)^{-1}]B=A$, 则 $B-A=$ _____.

答案： $-E$.

两侧左乘 $E-A$, 将得到:

$$\begin{aligned}(E-A)[E-(E-A)^{-1}]B &= (E-A)A \\ &= AB = A - A^2 \\ B &= A - E \\ B - A &= -E\end{aligned}$$

【考查点】

$[E-(E-A)^{-1}]B=A$ 可以看作 $\left[E - \frac{1}{E-A}\right]B=A$ (尽管矩阵世界里没有“除法”, 但是逆矩阵看成一种“倒数”也是合理的)

题 1.6 (2021 年 1) 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列各式中不一定成立的是 ().

A. $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$

B. $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

C. $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

D. $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

答案：C

根据 $r(A^T A) = r(A)$, 可知 A 选项一定成立。后续的 BCD 可看作如何对 A 进行的改造:

B 选项: $\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}$

D 选项: $\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T \end{pmatrix}$

【考查点】

$$r(A^T A) = r(A)$$

舒尔定理（分块矩阵的秩有关结论）

题 1.7（2022 年 1）设矩阵 A, B 均为 n 阶方阵， E 为 n 阶单位矩阵，若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则（ ）。

- A. $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} x = 0$ 仅有零解
- B. $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} x = 0$ 仅有零解
- C. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} x = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} x = 0$ 同解
- D. $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} x = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} x = 0$ 同解

答案：C

通过举例（比如 A 和 B 都是 0 矩阵，可排除 AB 选项）。

$Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，解可以写为 u 。

$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} x = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} x = 0$ 有相同解； $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} x = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} x = 0$ 有相同解。而这两者的解都是：

$$\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}$$

【考察点】 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，可得 A, B 有相同的秩。

舒尔定理（分块矩阵的秩有关结论）

题 1.8（2023 年 1）已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$ ， E 为 n 阶单位矩阵，记矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 ，则（ ）。

- A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$
- B. $r_1 \leq r_3 \leq r_2$
- C. $r_3 \leq r_1 \leq r_2$
- D. $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

答案：B

【考查点】舒尔定理（分块矩阵的秩有关结论）

对秩进行分析：

$$r\left(\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{r_1 - Ar_2} r\left(\begin{pmatrix} -ABC & O \\ BC & E \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{ABC=O} r\left(\begin{pmatrix} O & O \\ BC & E \end{pmatrix}\right) = n$$

$$r\left(\begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{r_1 - Cr_2} r\left(\begin{pmatrix} AB & O \\ O & E \end{pmatrix}\right) = n + r(AB)$$

$$r\left(\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{r_2 - AB r_1} r\left(\begin{pmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{pmatrix}\right) = n + r(-ABAB)$$

排序：

$$n \leq n + r(-ABAB) \leq n + r(AB)$$

题 1.9（2024 年 2） A 为四阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $A(A - A^*) = O$ ，且 $A \neq A^*$ ，则 $r(A)$

可能为（ ）。

- A. 0 或 1
- B. 1 或 3
- C. 2 或 3
- D. 1 或 2

答案: D

$A(A - A^*) = O$, 则说明 $r(A) + r(A - A^*) \leq 4$ 。

$$A(A - A^*) = A^2 - AA^* \xrightarrow{AA^* = |A|E=0} A^2$$

$$A^2 = 0 \Leftrightarrow A \times A = 0 \Rightarrow r(A) + r(A) \leq 4 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

而倘若 $r(A) = 0$, 说明 A 是一个 0 矩阵, A^* 也是 0 矩阵, 不满足 $A \neq A^*$ 的条件。所以选 D。

【考察点】如果 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$, n 为 A 的列数 (B 的行数)

$$AA^* = |A|E$$

题 1.10 (2025 年 1) 设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $r(A) + r(B) + r(C) = r(ABC) + 2n$. 给出下列四个结论, 则正确的是 ()

$$(1) \quad r(ABC) + n = r(AB) + r(C)$$

$$(2) \quad r(AB) + n = r(A) + r(B)$$

$$(3) \quad r(A) = r(B) = r(C) = n$$

$$(4) \quad r(AB) = r(BC) = n$$

- A. (1) (2)
- B. (1) (3)
- C. (2) (4)
- D. (3) (4)

答案: A

举反例: 矩阵 A 是 0 矩阵, (此时 BC 均为满秩矩阵)。

***理论推理做法: 利用西尔维斯特 (Sylvester) 秩不等式 (高代内容)

对于两个可乘的矩阵 X 和 Y (在此为 n 阶方阵), 西尔维斯特秩不等式表明:

$$r(X) + r(Y) - n \leq r(XY)$$

推导基本不等式

首先, 应用于矩阵 A 和 B :

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$$

其次, 应用于矩阵 AB 和 C :

$$r(AB) + r(C) - n \leq r(ABC)$$

现在, 将上面两个不等式进行组合:

$$(r(A) + r(B) - n) + r(C) - n \leq r(ABC)$$

整理后得到:

$$r(A) + r(B) + r(C) - 2n \leq r(ABC)$$

题目给出的条件是:

$$r(A) + r(B) + r(C) = r(ABC) + 2n$$

将这个条件与我们推导出的不等式 进行比较,我们发现不等式中的“小于等于”实际上是“等于”。
 当一个由多个不等式链导出的最终不等式取等号时,意味着链条中的每一个不等式都必须取等号。
 得出结论 (1) 和 (2)

$$\begin{aligned} r(AB) + r(C) - n &= r(ABC) \\ r(A) + r(B) - n &= r(AB) \end{aligned}$$

题 1.11 (2025 年 1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$, 若方程组 $A^2x = 0$ 与 $Ax = 0$ 有不同解, 则

$$a - b =$$

答案: -4

思路: 两个都是齐次方程组, 齐次方程组就两种情况: 唯一解(零解)和无数多解。 $A^2x = 0$ 与 $Ax = 0$ 有不同解, 又考虑到 A^2 的秩只会小于等于 A 的秩, 所以 $A^2x = 0$ 一定会有无穷多解, 而 $Ax = 0$ 如果是唯一解也不可能(因为如果 A 满秩, 那么 A^2 也满秩, 两个方程组都是只有唯一解了, 不合题意)。所以矩阵 A 不应该满秩。(可以用行变换, 也可以用行列式, 来处理这个信息, 得到 $a - b = -4$)

【考查点】与满秩矩阵相乘不改秩; A^2 的秩只会小于等于 A 的秩。

题 1.12 (2025 年 2) 设三阶矩阵 A, B 满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则 ()。

- A. 方程组 $(A + B)x = 0$ 只有零解
- B. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均只有零解
- C. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 没有公共非零解
- D. 方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解

答案: D

$r(AB) = r(BA) + 1$ 可以推出的结论有: A, B 必不满秩(反证法), A 和 B 的秩介于 1 到 2 之间。

方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解是对的, 求公共解相当于求它们共同组合成的方程组的解:

$$\begin{bmatrix} ABA \\ BAB \end{bmatrix} x = 0$$

$$r \begin{bmatrix} ABA \\ BAB \end{bmatrix} = r[ABA \quad BAB] \leq r[ABA + BAB] \leq r(ABA) + r(BAB)$$

而其中的 $r(ABA)$ 与 $r(BAB)$ 均小于等于 $r(BA)$, 而通过上面的推理以及等式 $r(AB) = r(BA) + 1$ 可知 $r(BA) \leq 1$, 所以

$$r(\mathbf{ABA}) + r(\mathbf{BAB}) \leq 2$$

所以该联合方程组存在非零解。

【考查点】关于秩的等式、不等式

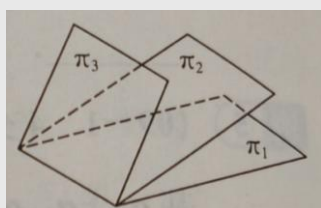
当 A 可逆时, $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$; 当 B 可逆时, $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

$$r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) = r([\mathbf{A} \ \mathbf{B}]) \leq r(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$$

题 1.13(2024 年 1 *仅数学一做)在空间直角坐标系中,三张平面 $\pi_i: a_ix + b_iy + c_iz = d_i (i=1, 2, 3)$,

位置关系如图所示, 记 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$, $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, 若 $r\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m, r\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$, 则



A. $m=1, n=2$

B. $m=2, n=2$

C. $m=2, n=3$

D. $m=3, n=3$

答案: B

题 1.14(2025 年 1 *仅数学一做)设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 n 维列向量, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \mathbf{0}$, 空间关于 x, y, z 的方程 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha_4$ 是(B).

A. 过原点的的一个平面

B. 过原点的一条直线

C. 不过原点的一个平面

D. 不过原点的一条直线

答案: D

2 行列式

题 2.1(2021 年 2, 3) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为

答案: -5

题 2.2 (2023 年 2, 3) 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$ ()。

A. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

答案: D

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* \text{ 应当有: } \begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix} = |AB|E$$

题 2.3 (2024 年 3) 设 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 若 $|A| = -\frac{1}{2}$ 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 则 ()。

A. $a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$

B. $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$

C. $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$

D. $b = -1$ 或 $b = \frac{1}{2}$

答案: B

$$|A| = -\frac{1}{2}$$

$$-M_{21} + M_{22} - M_{23} = \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

两个方程组, 两个未知数 (a, b) , 可得解。

题 2.4 (2024 年 3) A 为三阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为单位矩阵, 且 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| =$.

答案: 16

$r(2E - A) = 1$ 说明 2 是 A 的二重特征值; $r(E + A) = 2$ 说明 1 是 A 的二重特征值。

已知特征值, 则方便求出行列式。

【考察点】对特征值、特征向量、解的维数与秩之间的关系。

题 2.5 (2025 年 3) 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}, g(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x) = g(x)$ 的不同的根的个数为_____.

方法一:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$g(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix} = -2x(4x+1)$$

方法二:

观察到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的右三列内容重复 (但第二列和第四列交换了顺序)。

$f(x) = g(x)$, 则:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix} = 0$$

(交换第二个行列式的 2、4 列)

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 5x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 0 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix} = 0$$

行列式的第一列加到一起

$$\begin{vmatrix} 4x+2 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 7x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 4x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 1 \\ 3x+1 & 1 & 4x & -2 \\ 0 & 0 & 2x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 4x & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-x)(-4x-2-4x) = 0$$

$$2x(1+4x) = 0$$

答案: 2

题 2.6 (2023 年 2,3) 已知线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$$
 有解, 其中 a, b 为常数, 若

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4, \text{ 则 } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = .$$

答案: 8

【考查点】

将该矩阵的增广矩阵写出
$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

该方程组有解, 而这里面只有 3 个变量、4 个方程, 说明该系数矩阵的秩是 3. (如果是 4, 那就无解了)

进而说明它的行列式为 0. 而该行列式按照第四列展开, 刚好得到的结果就是:

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$$

题 2.7 (2021 年 1) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为三阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 $\mathbf{A}$ 的每一行之和均为 2, $|\mathbf{A}| = 3$, 则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} + A_{21} + A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第1列}+1\text{倍第2列} \\ \text{第1列}+1\text{倍第3列}}} \begin{vmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{22} & a_{23} \\ 2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$$

答案: $\frac{3}{2}$

题 2.8 (2025 年 3) 已知 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 的矩阵, β 是 m 维非零向量, 若 $\mathbf{A}$ 有 k 阶非零子式, 则 ().

A. 当 $k = m$ 时, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 有解

- B. 当 $k = m$ 时, $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 无解
- C. 当 $k < m$ 时, $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有解
- D. 当 $k < m$ 时, $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 无解

答案: A

$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 是 m 条方程、 n 个未知数。如果 $m > n$ (方程组数大于变量个数), 则不可能有 $k = m$ 这个说法的; 如果 $m \leq n$ (方程组数小于等于变量个数), $k = m$ 说明 $\mathbf{A}$ 的行是满秩的, 一定有解。

3 向量组与方程组

题 3.1 (2022 年 1, 2, 3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 等价, 则 $\lambda \in (\quad)$

- A. $\{0, 1\}$
- B. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$
- C. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$
- D. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$

将向量矩阵阶梯型化简:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & (\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

答案: C

题 3.2 (23-1, 2, 3 分) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 表示, 则 $\boldsymbol{\gamma} = (\quad)$.

- A. $k(3, 3, 4)^T, k \in \mathbf{R}$
- B. $k(3, 5, 10)^T, k \in \mathbf{R}$
- C. $k(-1, 1, 2)^T, k \in \mathbf{R}$
- D. $k(1, 5, 8)^T, k \in \mathbf{R}$

设

$$\boldsymbol{\gamma} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 = y_1 \boldsymbol{\beta}_1 + y_2 \boldsymbol{\beta}_2$$

意味着:

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 - y_1 \boldsymbol{\beta}_1 - y_2 \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\text{解得: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\gamma} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 = y_1 \boldsymbol{\beta}_1 + y_2 \boldsymbol{\beta}_2$, 则:

$$\boldsymbol{\gamma} = 3k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

答案: D

题 3.3 (2023 年 1) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_3$, 若 $\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$

经过观察, 发现 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是一组正交基, 则:

$$k_1 = \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1}{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1} = \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_1}{3}$$

$$k_2 = \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_2}{3}$$

$$k_3 = \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_3}{3}$$

而根据题意 $\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}_i$, 则有:

$$k_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$k_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}_2}{3} = -1$$

$$k_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}_3}{3} = -\frac{1}{3}$$

答案: $\frac{11}{9}$

题 3.4 (2024 年 2) 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量均线性无关, 则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.

将矩阵进行阶梯型化简:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & b & -1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & b+1 & -1+a \\ 0 & 0 & 2+a \end{bmatrix}$$

可得: $a = -2, b = 2$

答案: -4

题 3.5 (2021 年 2) 设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则 ()

- A. $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解
- C. $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 的解
- B. $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解
- D. $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 的解

【考查点】若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 说明存在:

$$A = BP$$

$$A^T = P^T B^T$$

$B^T x = 0$ 则可得 $P^T B^T x = 0$, 进而 $A^T x = 0$ 。

答案: D

题 3.6 (2021 年 3) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为四阶正交矩阵, 若矩阵 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k$ 表示任意常数, 则线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解 $x = ()$ 。

- A. $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_1$
- B. $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_2$
- C. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + k\alpha_3$
- D. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$

$Bx = \beta$ 意味着

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x 此时相当于一个向量,该向量与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 点乘的结果是1。而正交矩阵的特点就是列向量组成标准正交基。

答案: D

题 3.7 (2022 年 2, 3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = \beta$ 解的情况为 ()

- A. 无解
- B. 有解
- C. 有无穷多解或无解
- D. 有唯一解或无解

【考查点】克莱默法则+范德蒙德行列式。

答案: D

题 3.8 (2025 年 2) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$, 则方程组 $Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的通解为 $x =$

$$Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$$

$$(x_1 - 1)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + (x_4 - 4)\alpha_4 = 0$$

将 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ 代入可得:

$$(x_1 - 1)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + (x_4 - 4)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

$$(x_1 - 1 + x_4 - 4)\alpha_1 + (x_2 + x_4 - 4)\alpha_2 + (x_3 - x_4 + 4)\alpha_3 = 0$$

答案: $(k + 1, k, k, -k + 4)^T$

题 3.9 (2025 年 3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 2 .

(1) 求 a 的值;

(2) 求 A 的列向量中的一个极大线性无关组 α, β , 并求矩阵 H , 使得 $A = GH$, 其中 $G = (\alpha, \beta)$.

4 特征值与特征向量

题 4.1 (2025 年 1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 已知 1 是 A 的特征多项式的重根.

(1) 求 a 的值;

(2) 求所有满足 $A\alpha = \alpha + \beta, A^2\alpha = \alpha + 2\beta$ 的非零列向量 α, β .

【答案】(1) $a = 3$

(2) $A\alpha = \alpha + \beta, A^2\alpha = \alpha + 2\beta$, 第二条方程减去两倍的第一条方程, 则得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha} - 2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} &= -\boldsymbol{\alpha} \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{A} + \mathbf{E})\boldsymbol{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

题 4.2 (2024 年 1) 设 $\mathbf{A}$ 是秩为 2 的三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的非零向量, 若对满足 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任意向量 $\boldsymbol{\beta}$, 均有 $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$, 则 ().

- A. $\mathbf{A}^3$ 的迹为 2
- B. $\mathbf{A}^3$ 的迹为 5
- C. $\mathbf{A}^2$ 的迹为 8
- D. $\mathbf{A}^2$ 的迹为 9

$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$ 说明 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}$. $\mathbf{A}$ 是秩为 2 的三阶矩阵, 说明 0 是 $\mathbf{A}$ 的特征值是 1. 满足 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任意向量 $\boldsymbol{\beta}$, 而后者是有 2 维的, 说明 “1” 是双重特征值 (重根)。所以 $\mathbf{A}$ 的 3 个特征值分别为 1, 1, 0.

答案: A

题 4.3 (2021 年 2, 3) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值, 若 $\mathbf{A}$ 相似于对角矩阵, 求 a, b 的

值, 并求可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵.

$$(1) \ a = 1, b = 1, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(2) \ a = -1, b = 3, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

题 4.4 (2022 年 1) 下列各项中, 是 $A_{3 \times 3}$ 可对角化的充分而非必要条件是

- A. $\mathbf{A}$ 有 3 个不同特征值
- B. $\mathbf{A}$ 有 3 个无关的特征向量
- C. $\mathbf{A}$ 有 3 个两两无关的特征向量
- D. $\mathbf{A}$ 不同特征值对应的特征向量正交

答案: A

题 4.5 (2022 年 2, 3) 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}$ 特征值为 1, -1, 0 的充分必要条件是 ().

- A. 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}$
- B. 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$
- C. 存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$
- D. 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^T$

答案: B

注意: 特征值相同的, 不一定就相似。

题 4.6 (2023 年 1) 下列矩阵中, 不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

答案: D

(A 和 B 可以快速排除: A 有三个不同的特征值 1, 2, 3, 而 B 是实对称矩阵)

题 4.7 (2023 年 2, 3) 设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\mathbf{A}$;

(2) 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 与对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$, 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$.

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

题 4.8 (2024 年 1) 已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_0 = -1, y_0 = 0, z_0 = 2$ 且

$$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1}, \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1}, \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1}. \end{cases} \quad \text{记 } \alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ 写出满足 } \alpha_n = \mathbf{A}\alpha_{n-1} \text{ 的矩阵 } \mathbf{A}, \text{ 并求 } \mathbf{A}^n \text{ 及}$$

$x_n, y_n, z_n (n = 1, 2, \dots)$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1}2^n & -2 + (-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4 + (-1)^n 2^{n+1} & 2 + (-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x_n = 8 + (-2)^n, y_n = -8 + (-2)^{n+1}, z_n = 12$$

题 4.9 (2024 年 2) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为二阶矩阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则“ $\mathbf{A}$ 有两个不相等的特征值”是“ $\mathbf{B}$ 可对角化”的 ().

- A. 充分必要条件
- B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

记住结论：如果两个矩阵 A 和 B 可交换 ($AB = BA$)，并且其中一个矩阵（比如 A ）的特征值各不相同，那么 A 和 B 拥有共同的特征向量。

详细说明：设 v 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，即 $Av = \lambda v$ 。

我们来考察 $A(Bv)$ ：

$$A(Bv) = (AB)v$$

因为 $AB = BA$ ，所以 $(AB)v = (BA)v = B(Av)$

因为 $Av = \lambda v$ ，所以 $B(Av) = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$

综上，我们得到 $A(Bv) = \lambda(Bv)$ 。这表明向量 Bv 也是矩阵 A 属于同一个特征值 λ 的特征向量（或者 Bv 是零向量）。

由于 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 互不相等，其对应的特征空间都是一维的。这意味着任何属于 λ 的特征向量都必须是 v 的常数倍。

因此， Bv 必定是 v 的一个常数倍。也就是说，存在一个标量 μ ，使得 $Bv = \mu v$ 。

这就证明了 v 不仅是 A 的特征向量，同时也是 B 的特征向量。

而必要性不成立：举出反例，令 A 为单位矩阵 I ，令 B 也为单位矩阵 I 。

答案：B

题 4.10 (2025 年 3) 设 A 为三阶矩阵，则 $A^3 - A^2$ 可对角化是 A 可对角化的 ()。

- A. 充分但不必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

答案：B

证明必要性：

$$B = A^3 - A^2 = P D^3 P^{-1} - P D^2 P^{-1}$$

$$B = P (D^3 - D^2) P^{-1}$$

由于 D 是一个对角矩阵， D^2 和 D^3 也都是对角矩阵。

$$D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$$

$$D^3 = \text{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3)$$

因此， $D^3 - D^2$ 也是一个对角矩阵：

$$D^3 - D^2 = \text{diag}(\lambda_1^3 - \lambda_1^2, \lambda_2^3 - \lambda_2^2, \lambda_3^3 - \lambda_3^2)$$

根据可对角化的定义，这表明矩阵 $B = A^3 - A^2$ 是可对角化的。

***充分性：举反例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 不可对角化。

$A^3 - A^2 = 0$ (零矩阵) 零矩阵显然可对角化。

题 4.11 (2021 年 1) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$ ，若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交，则 l_1, l_2 依次为 ()。

A. $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

D. $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

答案：A

【考查点】施密特正交化

题 4.12 (2025 年 2) 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值，则 ()

A. $a > 4, b > 0$

B. $a < 4, b > 0$

C. $a > 4, b < 0$

D. $a < 4, b < 0$

答案：D

5 二次型

题 5.1 (2021 年 1, 2, 3) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ()。

A. 2, 0

B. 1, 1

C. 2, 1

D. 1, 2

答案：B

拆开括号，重新配方。

题 5.2 (2022 年 1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$ 。

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应矩阵；

(2) 求正交矩阵 Q ，使得二次型经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形；

(3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

答案：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(2) 特征值为 0, 0, 14

特征向量（标准正交化）后形成的矩阵为 $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$

令 $x = Qy$ ，将得到：

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j = 0y_1^2 + 0y_2^2 + 14y_3^2$$

(3)

根据题目条件可知 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 即 $y_3 = 0$,

而 $y = Q^{-1}x = Q^T x$, 所以有:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

题 5.3 (2022 年 2, 3) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

(1) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(2) 证明: $\min \frac{f(x)}{x^T x} = 2$.

(1)

求出特征值分别为 4, 4, 2. 对应的特征向量 (标准正交化) 组成的矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

标准型的结果为:

$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$$

(2)

$$\frac{f(x)}{x^T x} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3\right)^2 + y_2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3\right)^2} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \leq \frac{2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2$$

瑞利商定理 $\frac{f(x)}{x^T x}$:

瑞利商的最小值等于 A 的最小特征值, 且在对应特征向量处取得;

瑞利商的最大值等于 A 的最大特征值, 且在对应特征向量处取得。

题 5.4 (2021 年 1) 已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 C , 使得 $C^2 = (a+3)E - A$.

(1) 求特征值

$$|A - \lambda E| = (a - \lambda - 1)[(a - \lambda)^2 + (a - \lambda) - 2]$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a - 1, \lambda_3 = a + 2$$

特征向量为: ① $\lambda_1 = \lambda_2 = a - 1$

$$x = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用施密特正交化, 构建正交的、长度为 1 的特征向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

② $\lambda_2 = a + 2$

取单位向量，为

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

(2) 根据特征值的计算特点，“ $(a+3)E - A$ ”的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 1$$

于是有：

$$(a+3)E - A = P \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

根据题意

$$C^2 = (a+3)E - A$$

所以有：

$$C = P \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

由于 C 是正定矩阵，所以只取：

$$C = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

【思路解析】对于 $A = B^k$ 的问题，已知 A 而求 B ，可以看作：

$$A = PDP^{-1}$$

$$B^k = PDP^{-1}$$

$$B^k = (P^k \sqrt[k]{D} P^{-1})(P^k \sqrt[k]{D} P^{-1}) \cdots (P^k \sqrt[k]{D} P^{-1})$$

题 5.5 (2024 年 3) 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经正交变换化为 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$ ，则二次型对应的

矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式和迹分别为 ()。

- A. $-6, -2$
- B. $6, -2$
- C. $-6, 2$
- D. $6, 2$

答案: C

题 5.6 (2023 年 1) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3$$

- (1) 求可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$;
- (2) 是否存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?

(1) 简便做法:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3$$

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = x_3$$

(最后记得论证该变换是可逆的)。

(2) 这意味着 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, 而相似的必要条件是两者特征值对应相等。而两者的迹不同, 则必然特征值不会相同。

题 5.7 (2023 年 2, 3) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为 ()。

- A. $y_1^2 + y_2^2$
- B. $y_1^2 - y_2^2$
- C. $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$
- D. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

B

注意学习规范型与标准型的区别。

题 5.8 (2025 年 2) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同。

- (1) 求 a 的值及 k 的取值范围;
- (2) 若存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$. 求 k 及 $\mathbf{Q}$.

(1) 合同: 充要条件是两者的正惯性、负惯性指数相同。从 $\mathbf{B}$ 中观察到, 它的特征值为 $0, 6, k$. 矩阵 $\mathbf{A}$ 行列式为 0 (或者说不满秩), 可得 $a = 4$. 进而得出 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $0, 3, 6$. 需要 $k > 0$.

(2) $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$ 也意味着 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$ (正交矩阵 $\mathbf{Q}$), 所以 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 相似。 $k = 3$ 。

题 5.9 (2025 年 1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 的正惯性指数为 .

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

答案：B

题 5.10 (2025 年 3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, 若 $f(x, y) = |xA + yB|$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, 2 - \sqrt{3})$
- B. $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$
- C. $(2 + \sqrt{3}, 4)$
- D. $(0, 4)$

答案：B

判断正定的方案：

- (1) 特征值为正
- (2) 配方法进行观察
- (3) 顺序主子式均为正

题 5.11 (2024 年 2 12 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, $Ax = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解, 但

$Ax = 0$ 与 $B^T x = 0$ 不同解.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 求正交变换 $x = Qy$, 使 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$ 为标准形.

(1) 从题目信息得出: $Ax = 0$ 的解是 $B^T x = 0$ 解的真子集. B 的秩小于 A 的秩, 进而有 $b = 2$, 并且

$B^T x = 0$ 解为:

$$x = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

而 $Ax = 0$ 的解是:

$$x = k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix}$$

也就意味着存在恰当的系数, 使得:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得:

$$a = 1$$

$$(2) \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

***题 5.12 (2024 年 1) 设实矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, 若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta})^2 \leq \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}$ 都成立, 则 a 的取值范围_____.

答案: $a \geq 0$.