目　录

第1讲 数学基础知识

1.1 函数的基本常识

函数定义：设数集 $D\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为$y=f(x),x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。对每个$x\in D$，按对应法则f，总有唯一确定的值y与之对应。

名称	形式	定义域
幂函数	$y=x^{\alpha}$	需要根据α的值来具体确定，比如： $x^2,x^5,\cdots$，则$x\in\mathbb{R}$； $x^{-1},x^{-2},\cdots$，则$x\neq 0$； $x^{\frac{1}{2}},x^{\frac{1}{4}},\cdots$，则$x\geqslant 0$； ……
指数函数	$y=a^x(a>0)$	$x\in\mathbb{R}$
对数函数	$y=\log_a x$	$x>0$
三角函数	$y=\sin x,y=\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
	$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbb{Z}$
反三角函数	$y=\arcsin x,y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$
	$y=\arctan x$	$x\in\mathbb{R}$

【例题 1.1.1 基础题】给出下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

（2）$y=\ln(x^2-x-2)$

（3）$f(x+3)$的定义域为$x>-1$，则$f(x^2+1)$的定义域为？

答案：

（1）**错误解法：** $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}$，$x\neq 2$　　**正确解法：** $x^2-4=0,x\neq\pm 2$

（2）$x^2-x-2>0,(x+1)(x-2)>0,x\in\{x\mid x<-1或x>2\}$

（3）$x>-1$则有$x+3>2$，$f(x)$的定义域为$x>2$，$x^2+1>2$，

$x\in\{x\mid x<-1或x>1\}$

【例题 1.1.2 基础题】设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，求$f(2-x)$的表达式。

答案：

$$f(2-x)=\begin{cases}(2-x)^2-1, & (2-x)\le 0\\ (2-x)+2, & (2-x)>0\end{cases}=\begin{cases}3-4x+x^2, & x\ge 2\\ 4-x, & x<2\end{cases}$$

【例题 1.1.3 中等题】设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$，求：

（1）求$f(x)$的值域R；
（2）求$f\big(f(x)\big)$的表达式；
（3）求$f\big(f(x)\big)$的值域。

答案：
（1）$[1,+\infty)$.

（2）$f(x)\ge 1$，可得：$f(f(x))=\begin{cases}e^{x^2+1}, & x\le 0\\ e^{e^x}, & x>0\end{cases}$.

（3）$[e^1,+\infty)$

【例题 1.1.4 基础题】判断下列表达式是否为相同的函数：

（1）$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$

（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$与$y=\dfrac{1}{x}$

（3）$y^2+x^2=1$与$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

（4）$y^3+x^3=1$与$y=\sqrt[3]{1-x^3}$

答案：（1）不是（2）不是（3）不是（4）是

【例题 1.1.5 基础题】设函数$3f(x)+f(4-x)=4x$，求$f(x)$的表达式。

答案：令$t=4-x$代入，可得：

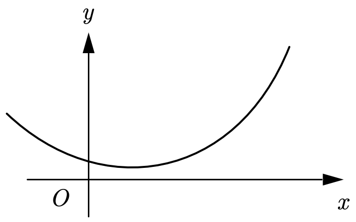
$$3f(4-t)+f(t)=4(4-t)$$

于是有：

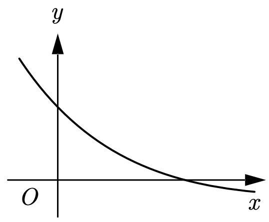
$$\begin{cases}3f(x)+f(4-x)=4x\\ 3f(4-x)+f(x)=4(4-x)\end{cases}$$

解方程组可得：$f(x)=2x-2$.

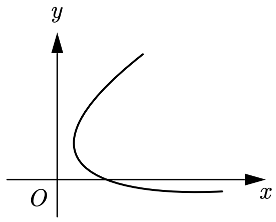
关于函数**唯一性**的判断也很重要。比如$y=x^2$属于函数，而$y=\pm\sqrt{x}$就不是函数，因为给出的函数值不唯一。需要注意的就是，同一个y值却可以对应多个x.如果一个函数值y只对应一个自变量x，就叫做**单射**。



函数图像，并非单射



函数图像，单射



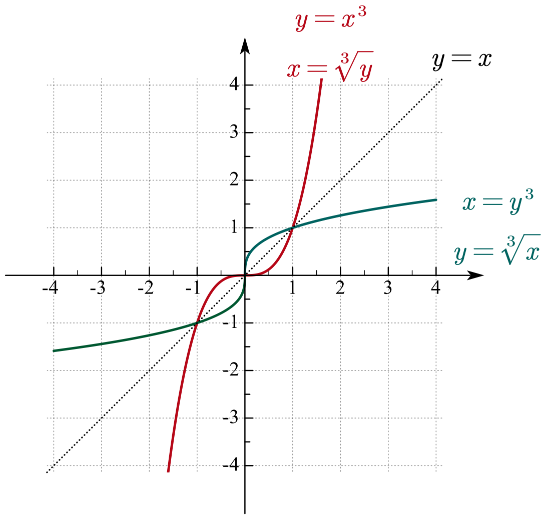
不是函数图像

反函数定义：设函数$f(x)$是**单射的****，则它存在逆映射f^{-1}，称此映射f^{-1}为函数f的反函数. 按此定义，对每个$y \in f(D)$，有唯一的$x \in D$，使得$f(x) = y$，有$f^{-1}(y) = x$.**

求得反函数的方法也比较简单：
第一步，在$y = f(x)$中将 y 与 x 互换；
第二步，重新整理为用 x 的表达式表示 y 的格式，此时就得到$y = f^{-1}(x)$.

举例理解：
（1）$f(x) = x^3$，反函数就是$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
（2）$f(x) = \mathrm{e}^x$，反函数就是$f^{-1}(x) = \ln x$.
（3）$f(x) = x^2$，不存在相应的反函数。
（4）$f(x) = x^2 (x \geqslant 0)$，反函数为$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

函数$y = f(x)$与其反函数$y = f^{-1}(x)$的曲线在图像上的关系：关于$y = x$直线呈轴对称。



【例题 1.1.6 基础题】求函数$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$的反函数.

答案：函数关系写为：

$$y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$$

将e^x记为u，可得：

$$u^2 - uy - 1 = 0$$

$$u = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

所以解出：

$$e^x = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$
$$x = \ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

交换y与x，得到反函数：

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

函数的重要性质：

（1）有界性

一个函数如果其值在某个区间内始终保持在一定范围内（即不超出某些最大值和最小值），则称该函数在这个区间内是有界的。如果没有这样的范围限制，称为无界的。

举例说明：$y=\sin x$在其定义域内是有界的，其函数值保持在$[-1,1]$之内；$y=2^x$在其定义域内就是无界的，其函数值会随着x增大而无限增大。

（2）单调性

一个函数$y=f(x)$，如果在某个区间内y会随着x增加而增加，则该函数在此区间是单调递增的；如果在某个区间内y会随着x增加而减小，则该函数在此区间是单调递减的。

举例说明：$y=x^2$在$x\in(-\infty,0)$区间内为单调递减的，而在$x\in(0,+\infty)$区间内为单调递增的。

（3）周期性

如果函数$y=f(x)$中的x每变化T后就会重复之前的函数值，则函数$y=f(x)$是具有周期性的函数，周期为T。表达式：$f(x+T)=f(x)$。

举例说明：$y=\sin x$和$y=\cos x$都是周期为2π的周期性函数。

（4）奇偶性

（1）奇函数：函数$y=f(x)$满足$f(-x)=-f(x)$，则函数$f(x)$为奇函数，比如$y=\sin x, y=x^3$。奇函数的曲线图像关于原点对称。

（2）偶函数：函数$y=f(x)$满足$f(-x)=f(x)$，则函数$f(x)$为偶函数，比如$y=\cos x, y=x^2$。偶函数的曲线图像关于y轴对称。

【例题 1.1.7 基础题】判断下列函数的奇偶性

（1）　$y=e^{x^2}\sin x$

（2）　$y=\tan^3 x\cdot\sin x$

（3）　$y=\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

（4）　$y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

答案：（1）奇函数　（2）偶函数　（3）奇函数　（4）奇函数

1.2 三角函数、反三角函数

注意描述角度θ的大小时，弧度制与角度值的区别：

（1）弧度制（radian）：对应的圆弧长度除以半径得到的数值

（2）角度制（degree）：将一周平均分为 360 份，每一份为一个单位

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

注意：我们后面会提到的内容，比如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$(\sin x)'=\cos x, (\cos x)'=-\sin x$等内容，这里面的变量$x$全部为弧度制。

其他三角函数： $\csc x=\frac{1}{\sin x}, \sec x=\frac{1}{\cos x}, \cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$

基本公式：

$\cos^2 x+\sin^2 x=1, \tan^2 x+1=\sec^2 x$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B, \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B, \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}, \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

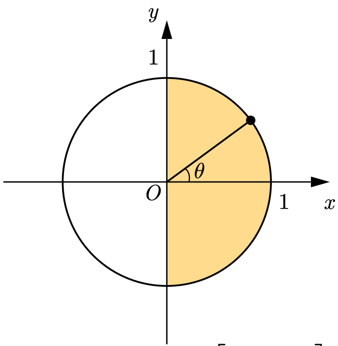
倍角公式与半角公式：

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

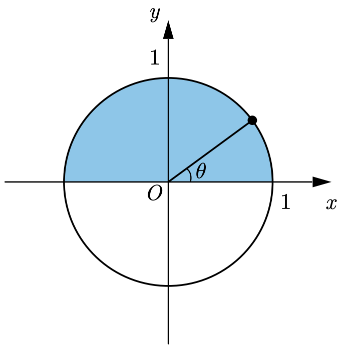
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

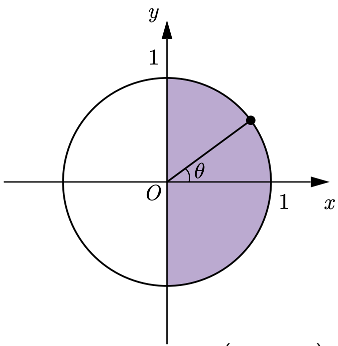
反三角函数：已知三角函数值，反算角度大小



$\theta=\arcsin x,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



$\theta=\arccos x,\ \theta\in[0,\pi]$



$\theta=\arctan x,\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

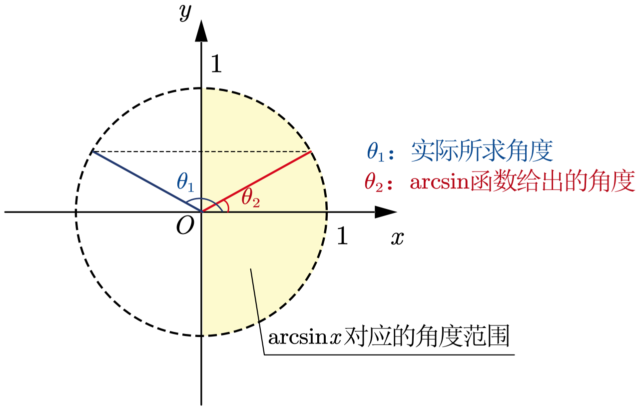
【例题 1.2.1 基础题】一个钝角的正弦值为$\frac{3}{4}$，请表示该角θ的大小

答案：

错误解法：$\arcsin\frac{3}{4}$

正确解法：由于该角度为钝角，而$\arcsin\frac{3}{4}$算出的结果是它的补角，由此需要改变运算：

$$\theta = \pi - \arcsin\frac{3}{4}$$



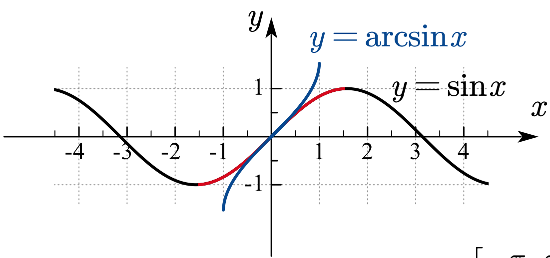
反三角函数中成立的表达式：

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}(x > 0)$$

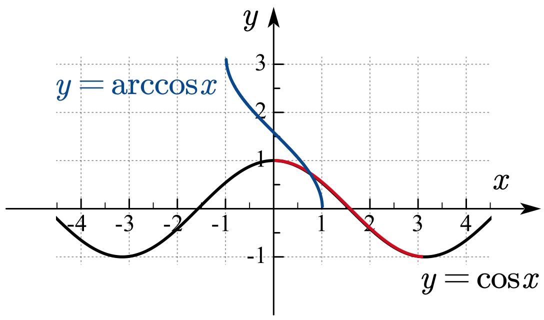
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}(x < 0)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}(-1 \le x \le 1)$$

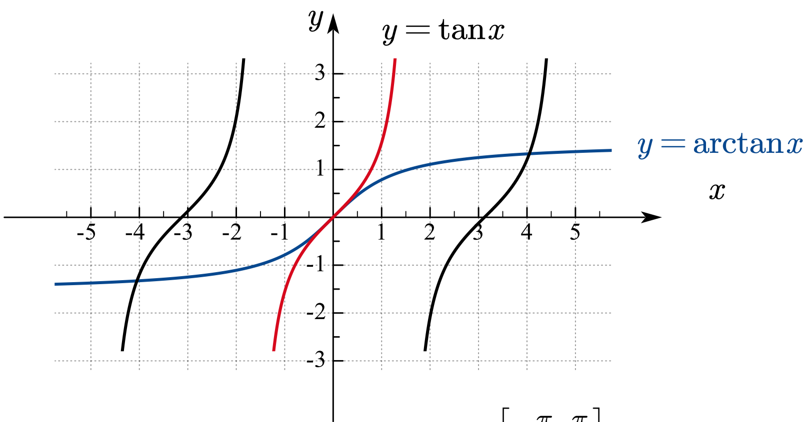
反三角函数的图像如下：



$y = \arcsin x,\ x = \sin y,\ x \in [-1,1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

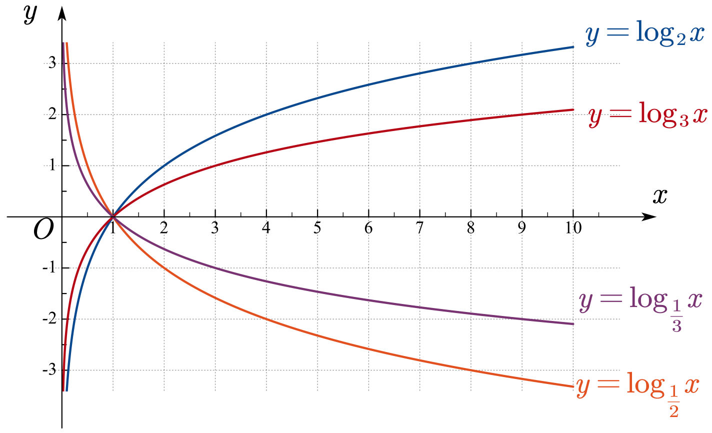


$y = \arccos x,\ x = \cos y,\ x \in [-1,1],\ y \in [0,\pi]$



$y = \arctan x,\ x = \tan y,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

1.3 指数函数与对数函数



对数函数常用公式：

$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log_a M^n=n\log_a M$，$\log_{a^n} M=\dfrac{1}{n}\log_a M$

换底公式：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$a^{\log_a b}=b(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$，$a=e^{\ln a}$，$a^b=e^{b\ln a}\ (a>0)$

【例题 1.3.1 基础题】给出下列情况中的变量大小顺序：

（1）$x>0$时：$2^x, e^x, 5^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$

（2）$x<0$时：$2^x, e^x, 5^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$

（3）$0<x<1$时，$\log_2 x, \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x, \ln x$

（4）$x>1$时，$\log_2 x, \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x, \ln x$

1.4 排列组合、二项式定理

从n个元素中选取m个元素对应的**排列**方案，我们记为“排列数A_n^m”。比如上面两题中出现的分别为A_4^4与A_6^2. 排列数的计算方法比较简单：

$$A_n^m=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m\text{个数字}}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

如果将 n 个元素全部参与排列，对应的排列方案A_n^n称之为“全排列数”，即：

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1=n!$$

从 n 个元素中选取 m 个元素对应的**组合**方案（组合，不考虑组合内的顺序问

题），我们记为“组合数C_n^m”，有时也记为$\binom{n}{m}$. 组合数的计算是在理解排列数的基础上进行：

$$C_n^m=\binom{n}{m}=\frac{A_n^m}{m!}$$

例如：

$$C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2!}=10$$
$$C_{10}^3=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$$

二项式定理：

$$(x+y)^n=C_n^0x^ny^0+C_n^1x^{n-1}y^1+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^{n-1}x^1y^{n-1}+C_n^nx^0y^n$$

理解二项式定理：拆解 n 次括号，相当于现在有 n 个篮子，每个篮中有 x 和 y 两个不同的元素，要从所有篮子中各取一个元素出来进行相乘，最后得到这样展开的结果。

$(x+y)^2$	$C_2^0x^2y^0+C_2^1x^1y^1+C_2^2x^0y^2$	$x^2+2x^1y^1+y^2$
$(x+y)^3$	$C_3^0x^3y^0+C_3^1x^2y^1+C_3^2x^1y^2+C_3^3x^0y^3$	$x^3+3x^2y^1+3x^1y^2+y^3$
$(x+y)^n$	$x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\cdots$	

1.5 常用的等式

等差数列求和：$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，其中$a_1$为数列首项，$d$为公差，$n$为项数

等比数列求和：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，其中$a_1$为数列首项，$q$为公比且不等于 1，$n$为项数

平方和公式：$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

n次方差公式：

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),n\in N^*$$

例如：

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

根据这个式子，我们可以得出两个推广：

（1）n次方和公式：

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$,$n$是正的奇数

证明：在n为奇数时，$a^n+b^n=a^n-(-b)^n$

例如：

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

（2）n次方根差：

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

1.6 常用不等式

(1) $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

(2) $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $(a>0,b>0)$

(3) $\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $(a>0,\ b>0,\ c>0)$

(4) $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\dfrac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}{n}}$

(5) $0<a<x<b,\ 0<c<y<d,\ \dfrac{c}{b}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{a}$

(6) $\sin x<x<\tan x\,(0<x<\dfrac{\pi}{2})$， $-|x|\le\sin x\le|x|$

(7) $\arctan x<x<\arcsin x\,(0<x<\dfrac{\pi}{2})$

(8) $\ln(1+x)<x<e^x-1$

【例题 1.6.1 基础题】求以下函数的最小值：

（1）$f(x)=x^2+\dfrac{9}{x^2+1}$

（2）$g(x)=e^x+e^{-x}$

答案：（1）$f(x)=(x^2+1)+\dfrac{9}{x^2+1}-1$，根据基本不等式可知其中：

$$(x^2+1)+\frac{9}{x^2+1}\ge 6$$

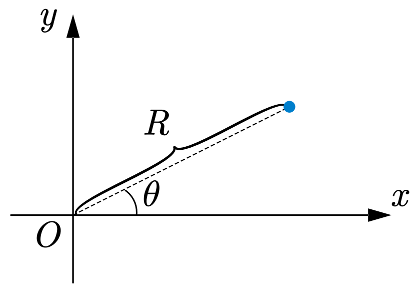
所以$f(x)\geq 5$，其最小值为 5，当且仅当$(x^2+1)=\dfrac{9}{x^2+1}$会取得最小值，即$x=\pm\sqrt{2}$。

（2）$g(x)=e^x+e^{-x}$，根据基本不等式可知：

$$e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2\sqrt{1}$$

其最小值为 2，当且仅当$x=0$时取得最小值。

1.7 极坐标



ρ表示点到原点（也被称为“极点”）的距离，被称为“极径”，$\rho\in[0,+\infty]$
θ表示点与原点连线与 x 轴（也被称为“极轴”）正向之间的夹角，被称为“极角”，　$\theta\in[0,2\pi)$

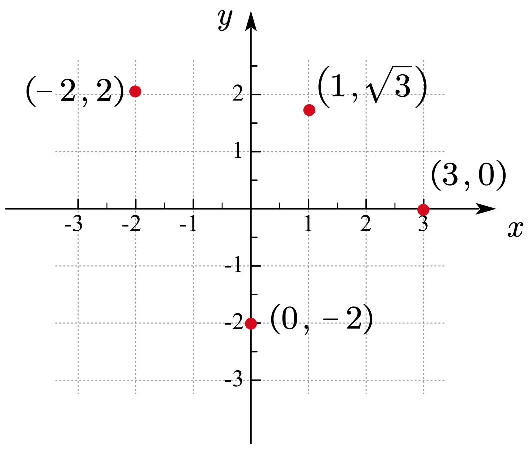
【例题 1.7.1 基础题】将下列直角坐标转化为极坐标：

(1) $(1,\sqrt{3})$

(2) $(3,0)$

(3) $(0,-2)$

(4) $(-2,2)$



(1) $(1,\sqrt{3})$　$\rho=2,\theta=\frac{\pi}{3}$

(2) $(3,0)$　$\rho=3,\theta=0$

(3) $(0,-2)$　$\rho=2,\theta=\frac{3\pi}{2}$

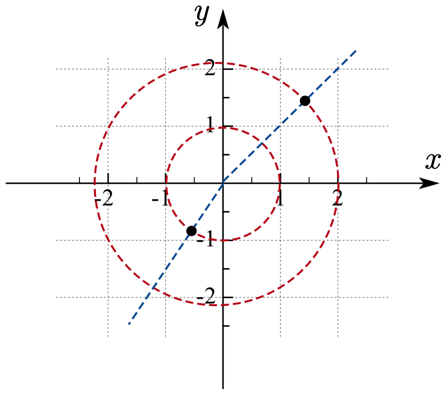
（4）$(-2,2)$ $\rho=2\sqrt{2},\theta=\frac{3\pi}{4}$

【例题 1.7.2 基础题】将下列极坐标转化为直角坐标

（1）$\rho=2,\theta=\frac{\pi}{4}$

（2）$\rho=1,\theta=\frac{4\pi}{3}$

答案：



（1）$(\sqrt{2},\sqrt{2})$

（2）$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

极坐标与直角坐标之间的转化见下图：

直角坐标(x,y)

$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & \text{第一象限}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{第二、三象限}\\ \arctan\frac{y}{x}+2\pi & \text{第四象限}\end{cases}$$

极坐标(ρ,θ)

【例题 1.7.3 基础题】在平面直角坐标系中，圆心在(1,0)处、半径为 1 的一个圆，用极坐标写出对应的方程。

答案：利用直角坐标写出对应的方程为：$(x-1)^2+y^2=1$

将$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入，得：

$$(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta)^2=1$$

化简后得：

$$\rho=2\cos\theta$$

第2讲 极限

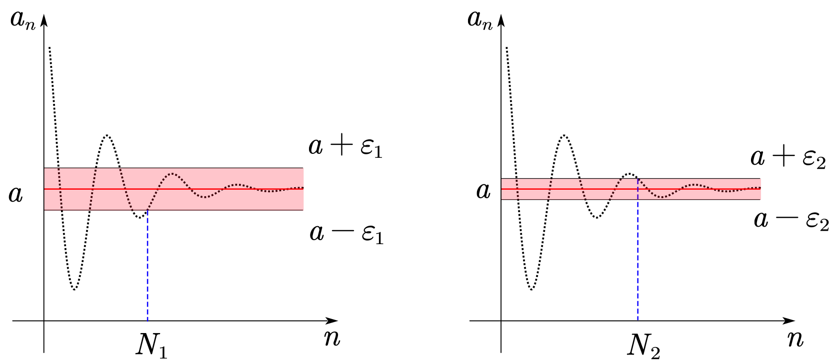
2.1 数列极限

数列极限的定义：设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正整数N, 使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者说数列$\{x_n\}$收敛于常数a. 记为：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，或者 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

比如下面这两个数列：

$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$$
$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$$

如果说这两个我们通过观察发现，这两个数列都分别不断地向 0 和 1 靠拢。而且它们与 0、1 的距离是“要多小就有多小”，这时我们称这两个数列的“极限”分别为 0 和 1。关于极限定义中，N是动态的，是随着ε而可以改变的。如下图所示：



$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，$N_1 < N_2$

数列的极限是常数a，则x_n与a的差值“要多小有多小”；任意给定的正数ε，是提出“要多小”这个要求的，而正整数N对应来实现“有多小”。

判断下列数列是否有极限，如果有，极限是多少？

(1) $100.1, 100.01, 100.001, 100.0001, 100.00001, \ldots$（答案：极限值是 100）

(2) $9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots$（答案：不存在极限值）

(3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ （答案：不存在极限值）

(4) $-1,\ 0.1, -0.01, 0.001, -0.0001, \ldots$（答案：极限值是 0）

(5) $5.3, 5.03, 5.003, 5.0003, 5.00003, \ldots$（答案：极限值是 5）

【例题 2.1.1 基础题】下面描述中哪个说法可以等价于“数列$\{x_n\}$的极限为a”：

A. 对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，当$n > N$时，不等式$x_n - a < \varepsilon$成立

B. 对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，当$n > N$时，有无穷多项x_n使不等式$|x_n - a| < \varepsilon$成立

C. 存在正整数 N，对于任意给定的正数ε，当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$成立

D. 对于任意给定的实数ε，总存在正整数N，使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < e^{\varepsilon}$都成立

答案：D

A. 不对，没有绝对值符号，只要a_n始终比a小，就可以满足这个条件；

B. 有无穷多项不等同于“始终”，比如$x_n=\sin\frac{n\pi}{100}$

C. 这个条件太“苛刻”了，这意味着 $n>N$ 时，$|x_n-a|=0$，即$x_n=a$.

D. 正确，ε是任意的，e^{ε}也会成为是任意的正数。

如若$\{x_n\}$存在极限，则其是收敛的，收敛数列的性质：

(1) 唯一性：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一；

(2) 有界性：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它一定有界（存在正数M，使得$|x_n|<M$）；

(3) 保号性：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$（或$a<0$），那么存在正整数$N$，当$n>N$时，都有$x_n>0$（或$x_n<0$）；

(4) 子列收敛：如果数列$\{x_n\}$收敛到a，那么它的任一子数列也收敛到a；

(5) 不等式性质：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, ①若$a>b$，则$\exists N$, 当$n>N$时有$x_n>y_n$；②若$x_n>y_n$，则有$a\geq b$。

【例题 2.1.2 基础题】判断下列说法正确的个数有：

①有界的数列一定收敛。

②发散的数列一定无界。

③若$x_n>y_n$，且两者分别存在极限值$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则$a>b$。

④$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

⑤$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案：A

①错误 ②错误 ③错误 ④正确 ⑤错误

关于①和②选项的错误，我们可以举两个反例：

(1) $\sin\frac{\pi}{100},\sin\frac{2\pi}{100},\sin\frac{3\pi}{100},\cdots,\sin\frac{n\pi}{100},\cdots$

(2) $-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$

它们都没有极限，即发散的。但是其取值范围是$[-1,1]$，属于有界数列。

关于③，比如数列$x_n=\dfrac{2}{n}$, $y_n=\dfrac{1}{n}$，两者极限相同为 0.

关于④，x_{2n}与x_{2n+1}是x_n的子列，并且x_{2n}与x_{2n+1}可以合并为x_n；

关于⑤，x_{3n}与x_{3n+1}是x_n的子列，但两者并不可合并为完整的x_n。

【例题 2.1.3 基础题】判断下列说法正确的个数有：

①若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则$\exists N$, 当$n>N$时有$x_n>\frac{a}{2}$;

②若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$，则$\exists N$, 当$n>N$时有$|x_n|>\frac{|a|}{2}$;

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^2$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；

④若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^2$ 存在。

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案：C
①正确，保号性的推论。
②正确，保号性的推论。
③不正确，比如 $x_n=(-1)^n$。
④正确。

【例题 2.1.4 拔高题】（2022·数学一、数学二）已知数列 $\{x_n\}$ 满足

$-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$，则下列说法正确的是：

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在。

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在。

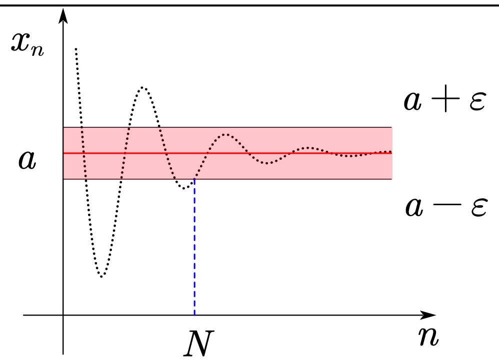
答案：D

$\sin x$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时单调连续，如果 $\sin x_n$ 有极限，则 x_n 也有极限；

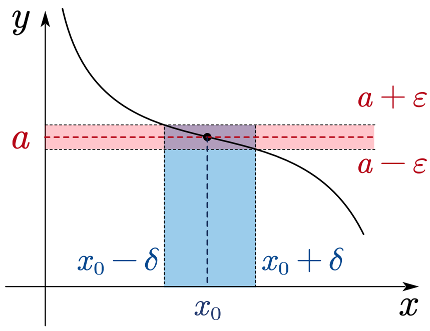
相反，$\cos x$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，同一个 $\cos x$ 值会可能对应两个不同的 x（相反数），如果 $\cos x_n$ 有极限，则 x_n 不一定有极限。

2.2 函数极限的基本定义

函数极限的定义（x 趋近于某个常数 x_0 时）： 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一**去心邻域**内有定义，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $\boldsymbol{0<|x-x_0|<\delta}$ 时，总有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，那么常数 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a$（当 $x\to x_0$）.



数列极限

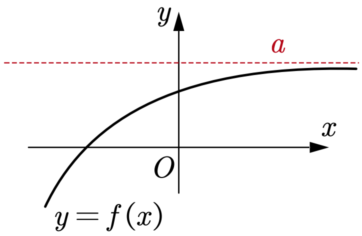


函数极限

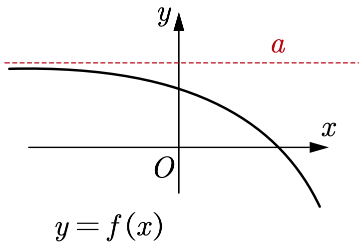
数列的极限： 只要n足够大（$n>N$），那么x_n与a的距离$|x_n-a|$就可以"要多小有多小"；

函数的极限： 只要x与x_0足够接近（$|x-x_0|<\delta$），那么$f(x)$与a的距离$|f(x)-a|$就可以"要多小有多小"。

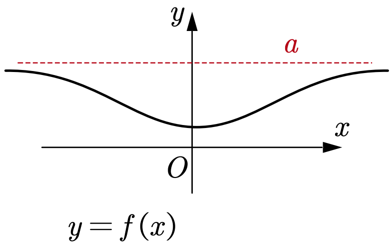
> **函数极限的定义（x趋近于无穷大时）：** 设函数$f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，总有$|f(x)-a|<\varepsilon$，那么常数a就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，
>
> 记作：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$或 $f(x)\to a$（当$x\to\infty$）.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$



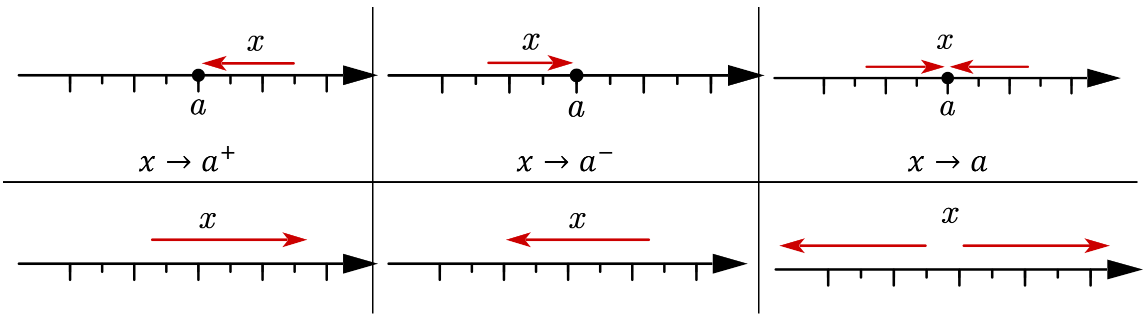
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$

常见的无穷远处极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

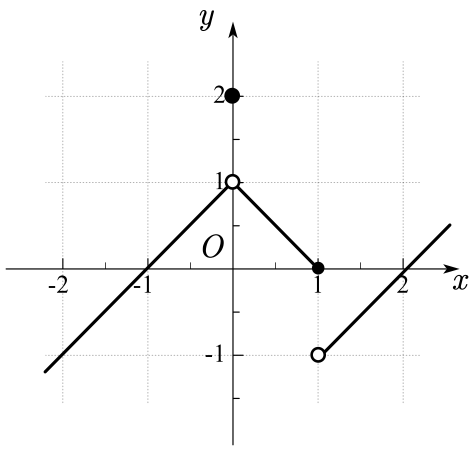
函数极限的自变量x趋近方式存在 6 种情况：



$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to \infty$

注意：$x \to x_0$时$f(x)$有没有极限与$f(x)$在点x_0是否有定义并无关系。需要体会$x \to a$和$x = a$的区别，以及lim算符的真正含义。

根据下图给出的$f(x)$图像，判断下列表达式取值：



(1) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$（答案：0）

(2) $f(-1)$（答案：0）

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ （答案：1）

(4) $f(0)$（答案：2）

(5) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ （答案：-1）

(6) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$（答案：0）

(7) $f(1)$（答案：0）

【例题 2.2.1 基础题】设函数$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，而$\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$的结果为：

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

答案：B

原因是当$x \to 0$时，求得$x^2 \to 0^+$，所以求$\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$等同于求$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$，结果为 1。

2.3 函数极限的基本思想

核心思想一：代入

如果$f(x)$是初等函数，且a在其定义域内，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

【例题 2.3.1 基础题】求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2}{x+1}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \sin(2\pi x)$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

答案：(1) $\frac{7}{4}$ （2）0 （3）0 （4）∞（没有）

核心思想二：极限四则运算法则

如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ （A和B都是常数）则有

(1) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

推广：

（1）幂指运算法则：如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B \quad (A > 0)$，则有

$\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

（2）“0”×有界=“0”：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$，而$g(x)$在$a$的某个去心邻域内有界，则

$\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = 0$.

（3）无穷大的加减法：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$，而$g(x)$在$a$的某个去心邻域内有界，则

$\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \infty$.

【例题 2.3.2 基础题】计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{7}{x^2+x-12} \right)$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x}{2} + 3 \right)^{\log_8 x}$

答案：

(1) 错误做法：原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7}{x^2+x-12}=\infty-\infty=0$

正确做法：原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{7}{(x-3)(x+4)}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{7}$

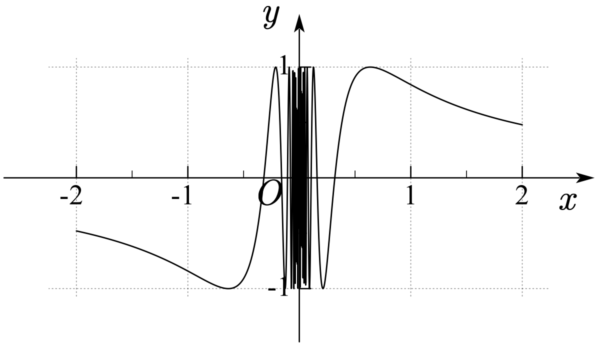
(2) 错误做法：原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)}=\dfrac{0}{0}=1$

正确做法：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}=-1$

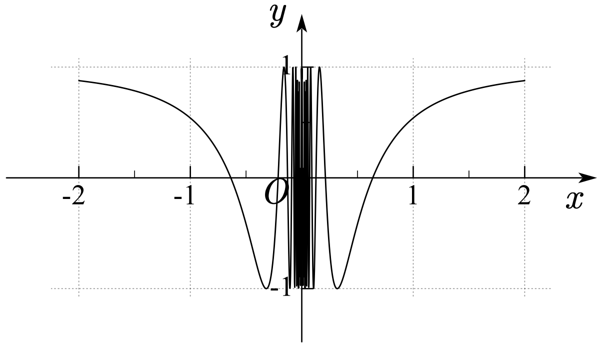
(3) 根据“0”×有界=“0”的原则，该式结果为 0.

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=4$，$\lim\limits_{x\to 2}\log_8 2=\dfrac{1}{3}$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^{\log_8 x}=4^{\frac{1}{3}}$

关于 $y=\sin\frac{1}{x}$ 以及 $y=\cos\frac{1}{x}$ 这两个函数，我们需要把握它们在 $x=0$ 附近的函数图像特点：振荡。



$y=\sin\dfrac{1}{x}$



$y=\cos\dfrac{1}{x}$

核心思想三：认识无穷小与无穷大

（1）**无穷小的定义：** 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小；

（2）**无穷大定义 1（$x\to x_0$ 时出现的无穷大）：** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ，只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大；

（3）**无穷大定义 2 （$x\to\infty$ 时出现的无穷大）：** 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 X，只要 x 适合不等式 $|x|>X$，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大。

【例题 2.3.3 基础题】判断下列函数是否属于无穷大/无穷小：

(1) $\sin x$，$(x\to 0)$

(2) $1+\cos x$，$(x\to\pi)$

(3) $\frac{1}{x}$，$(x \to 0)$

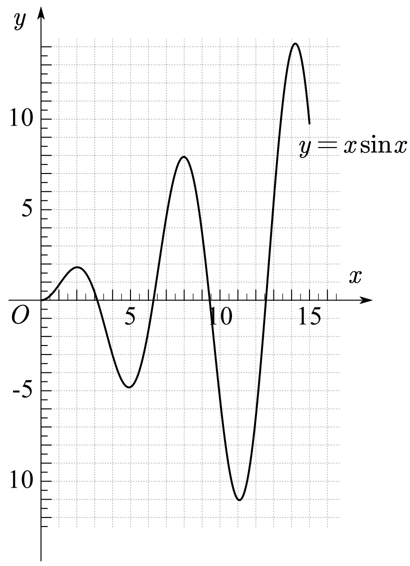
(4) $\frac{1}{x}$，$(x \to +\infty)$

(5) $\ln x$，$(x \to 0)$

(6) $x \cdot \sin x$，$(x \to +\infty)$

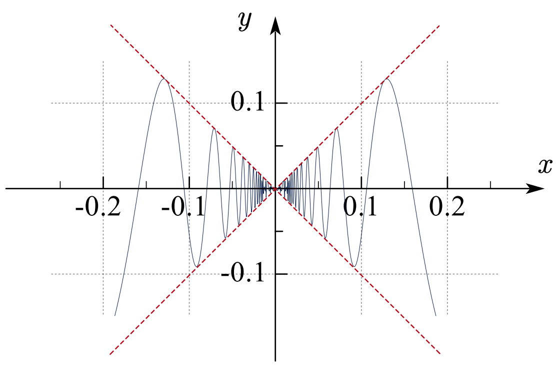
(7) $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$，$(x \to 0)$

(1) 无穷小
(2) 无穷小
(3) 无穷大
(4) 无穷小
(5) 无穷大
(6) 既不是无穷小，也不是无穷大，也不是常数，见下图：



(7) 无穷小（无穷小×有界变量仍为无穷小）

此外，$y = x\sin\frac{1}{x}$的函数图像如下：



核心思想四：抓住问题关键

求极限时，需要注意抓住极限要素的关键，分别是：（1）抓大放小；（2）抓“致

0 因子”。
见以下例题实操，体会这两个关键点。

【例题 2.3.4 基础题】求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x}{5x^2+3x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2x}{5x^2+3x}$

答案：

（1）分子分母上下同时除以x^2，可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x}{5x^2+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{x}}{5+\frac{3}{x}}=\dfrac{3}{5}$

（2）分子分母上下同时除以x，可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2x}{5x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+2}{5x+3}=\dfrac{2}{3}$

【例题 2.3.5 基础题】计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2+3x+3}{4x^3+x^2+6x+9}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+2x^3}{9x^2+7x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{x^2+2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5x}{x^3+2x^2}$

答案：（1）$\dfrac{5}{4}$；（2）$\dfrac{2}{9}$；（3）0；（4）∞

【例题 2.3.6 基础题】求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$

(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+2x-3}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

答案：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$

(2)

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\right)\cdot\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}{(x-1)\,(x+2)\cdot\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2\boxed{(x-1)}}{\boxed{(x-1)}(x+2)\cdot\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

导致分子分母等于0

的“罪魁祸首”

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)\cdot\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x+2)\,(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x+2)\,(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-2}{x-3}=\infty$

(5) 令 $(x-1)=t$，于是原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{(t+1)^2+3(t+1)-4}{(t+1)^3+2(t+1)-3}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2+5t}{t^3+5t+3t^2}=1$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x+3x^2+x^3}{x}=3$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$

核心思想五：等价无穷小代换

当$x\to0$时，参照以下表格，左侧函数可以替换为右侧的表达。

常用的等价无穷小（$x\to0$）	
$\sin x$	x
$\tan x$	
$\arcsin x$	
$\arctan x$	
$\ln(1+x)$	
e^x-1	
a^x-1	$x\ln a$
$[(1+x)^a-1]$	ax
$1-\cos x$	$\frac{x^2}{2}$

求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\frac{x}{2}}=2$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{5^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln2}{x\ln5}=\dfrac{\ln2}{\ln5}=\log_5 2$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^{x-3}-1}{\sin(2x-6)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-3}{\sin[2(x-3)]}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-3}{2(x-3)}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin[(x-\pi)+\pi]}{(x-\pi)(x+\pi)}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin(x-\pi)}{(x-\pi)(x+\pi)}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-(x-\pi)}{(x-\pi)(x+\pi)}=-\dfrac{1}{2\pi}$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1+1)\right]}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{\pi}{2}\right]}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

(9) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}}{\ln(e+x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\ln(e+x)-\ln e}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}=e$

使用等价无穷小代换的关键：

（1）无穷小才能换，比如$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x}\neq1$

（2）要学会“抓住”无穷小再代换，如果$x\to0$，则$kx(k\neq0)$、x^2等表达式也是无穷小。如果$x\to a(a\neq0)$，此时就要从式子中凑出$(x-a)$这个量。

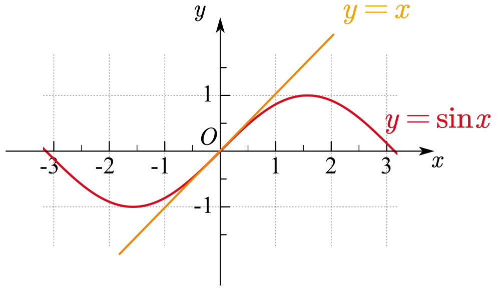
【例题 2.3.7 基础题】（2024 数学一 5 分）若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$________.

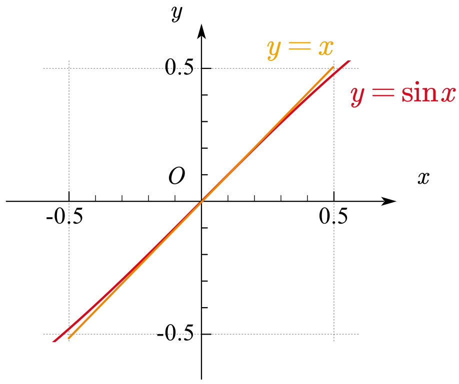
答案：6

2.4 两个特殊极限与两个极限准则

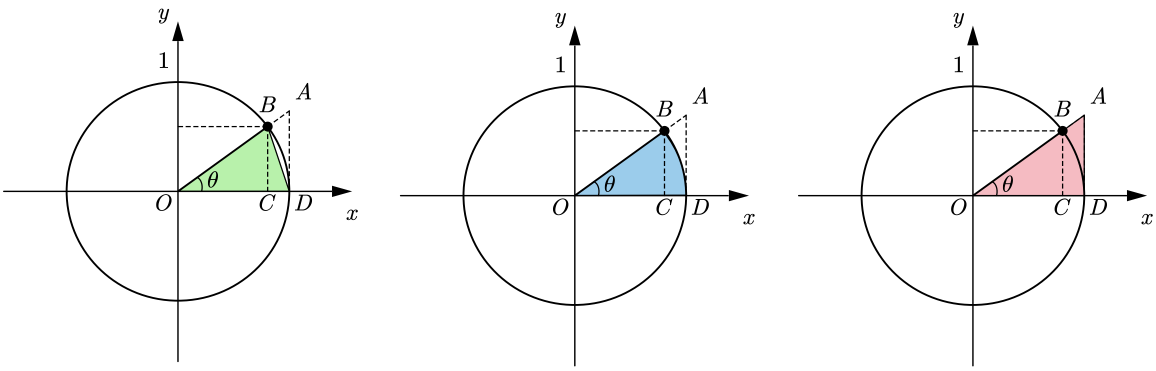
特殊极限 1：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

从曲线图像上理解：





具体推导：



观察图片可以看出：

$$S_{\Delta OBC} < S_{\text{扇形}OBD} < S_{\Delta OAD}$$

代入面积值：

$$\frac{\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan\theta}{2}$$

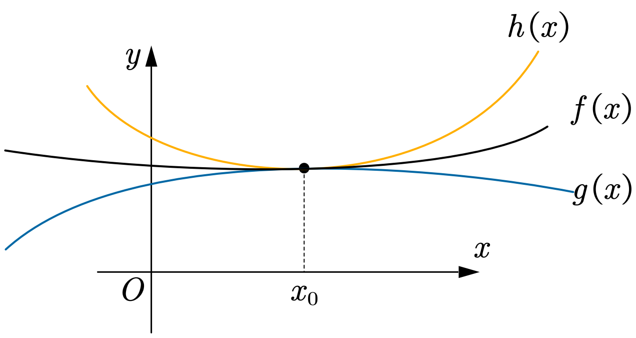
化简得到：

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

在$\theta \to 0$时，$\cos\theta \to 1$，而$\frac{\sin\theta}{\theta}$夹在$\cos\theta$与 1 之间，所以自然想到$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$.

夹逼准则：

①函数情形：在x_0的某去心邻域内，存在$g(x) \le f(x) \le h(x)$，且满足$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.



②数列情形：若存在N使得当$n > N$时有$u_n \le x_n \le v_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

特殊极限 2： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\approx 2.718$

原理解读[1]：结合银行利率计算，推导 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$：

存 1 元，年利率为 100%，如果计算利率是每年计算 1 次，可取的金额：2

每年计算 2 次，可取的金额：$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$

每年计算 4 次，可取的金额：$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2.44141$

每年计算 12 次，可取的金额：$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2.61304$

每年计算 365 次，可取的金额：$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2.71457$

每年计算 10000 次，可取的金额：$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=2.71815$

……

假设每年计算n次，则对应的金额$y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

我们来证明，y随着n增大而增大：根据之前所学的二项式定理，将括号展开：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

同理可得：

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

对比观察，可以看出下面这个式子除了前两项，后面的每一项都比上面的要大。

但同时可以证明，y并不会随着n增大而增大到无穷大：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\left[1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\right]<1+\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right]$$
$$1+\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right]<1+\left[1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

单调有界准则：如果一个数列单调递增的同时存在上界，或是单调递减的同时存在下界，那么该数列存在极限。

上述过程符合单调递增有上界，定义极限结果为：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\approx 2.718$。这是一种“$1^\infty$”类型的极限。相关的例子见以下公式：

$$(1.01)^{365}=37.7834$$
$$(0.99)^{365}=0.025518$$

[1] 这里的解读并非考点，仅作课外拓展了解。

"1^∞"型极限：求极限$\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{g(x)}$，其中$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，而$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，

我们称该极限为"1^∞"型极限。计算该极限存在三种常用方法：

①还原为e的特殊极限形式：$\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\cdot f(x)\cdot g(x)}$

②使用$a^b=e^{b\ln a}$进行转换格式：$\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)\ln[1+f(x)]}$

③直接套用公式：　原式$=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)}$。

【例题 2.4.1 基础题】求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+8}\right)^{5x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

答案：（1）e；（2）e^{15}；（3）$e^{-\frac{25}{2}}$；（4）$e^{-\frac{1}{2}}$

【例题 2.4.2 基础题】（2022 数学二 5 分）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$______.

答案：$\sqrt{e}$

2.5 进一步认识无穷小与无穷大

无穷小之间的比较

高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小的定义：
下面的 α 及 β 都是在同一个极限过程中的无穷小，且$\alpha\neq 0$：

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，那么就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$；

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小；

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$，那么就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小；

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，那么就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$.

例如：

(1) $x\to 0$时，$2x^2$与x^2属于同阶无穷小；

(2) $x\to 0$时，x^2是比x高阶的无穷小，x是比x^2低阶的无穷小；

(3) $x\to 0$时，$3x+5x^2$是与$3x$等价的无穷小；

(4) $x\to a$时，$(x-a)^3$是关于$(x-a)$的 3 阶无穷小；

(5) $x\to\infty$时，$\frac{1}{x^2}$是比$\frac{1}{x}$高阶的无穷小，$\frac{1}{x}$是比$\frac{1}{x^2}$低阶的无穷小；

假设在$x\to 0$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$分别为关于x的m和n阶无穷小，且$m>n$，不难得出以下结论：

(1) $\alpha(x)\pm\beta(x)$为n阶无穷小；

(2) $\alpha(x)\times\beta(x)$为$m+n$阶无穷小；

(3) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$为$m-n$阶无穷小.

【例题 2.5.1 中等题】判断下列说法正确的个数：

(1) $x\to 0$时，$(2x+3x^2)$与$(2x-5x^3)$是等价无穷小；

(2) $x\to 0$时，$5x^2\cdot\cos x\cdot e^x$是关于x的 2 阶无穷小；

(3) $x\to 0$时，$x^2\cdot\cos\frac{1}{x}$是x的高阶无穷小；

(4) $x\to 0$时，$x^2\cdot\cos\frac{1}{x}$是x的 2 阶无穷小。

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案：C

(1) 正确，因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+3x^2}{2x-5x^3}=1$。

(2) 正确，因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2\cdot\cos x\cdot e^x}{x^2}=5$。

(3) 正确，因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cos\frac{1}{x}=0$。

(4) 错误，因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$，不存在极限值。

【例题 2.5.2 基础题】(2022 年 数学二/数学三 5 分）当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题：

(1) 若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

(2) 若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

(4) 若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中所有真命题的序号是

A. (1)(3).

B. (1)(4).

C.（2）（3）（4）.
D.（1）（3）（4）.

答案：D

等价无穷小代换禁区

等价无穷小代换是计算极限最常用的方法之一，但需要关注以下两种情况不要用：

（1）两个无穷小量相加减时，要慎重进行等价无穷小代换。

（2）等价无穷小代换中，振荡的无穷小要小心！

【例题 2.5.3 基础题】计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

答案：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{2x(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\left[\dfrac{1}{t}-\dfrac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$

【例题 2.5.4 拔高题】计算以下极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$

答案：错误解法：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

错误原因：采用了“$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}$”等价代换，实际上这两者不能算是“等价无穷小”。

如果认为两者是等价无穷小的，就意味着成立$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}=1$，然而这个极限不成立（该函数找不到$x=0$的去心邻域内使其有定义）。

正确做法：由常用不等式$-|a|\le\sin a\le|a|$，可以推导得出：

$$-\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\leqslant\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$-\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right| \leqslant \frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x} \leqslant \left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to 0} -\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$$

由此得出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$.

无穷大之间的对比

无穷大的变量之间的对比关系：

$$\ln x \ll x^a \ll x^b \ll c^x \ll d^x \ll x! \ll x^x$$

$$(x\to+\infty,\ 0<a<b,\ 1<c<d)$$

当两个相差无穷倍的量相进行加减时，这时候我们眼里可以忽略相对较小的一个量。在具体操作上，应该将最大的成分提括号外，分子分母同时除掉即可。

$x\to+\infty$时：$3x^3+5x^2 = x^3\cdot\left(3+\dfrac{5}{x}\right)$

无穷大量　　无穷大量　常数3

$x\to+\infty$时：$2^x+3^x = 3^x\cdot\left(\dfrac{2^x}{3^x}+1\right)$

无穷大量　　无穷大量　常数1

$x\to+\infty$时：$2^x+x^5 = 2^x\cdot\left(1+\dfrac{x^5}{2^x}\right)$

无穷大量　　无穷大量　常数1

【例题 2.5.5 基础题】求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\times3^x+4\times4^x+6\times5^x}{7\times3^x+8\times4^x+9\times5^x}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\times3^x+4\times4^x+6\times5^x}{7\times3^x+8\times4^x+9\times5^x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\times3^x+4\times4^x+6\times5^x}{7\times3^x+8\times4^x+9\times5^x}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^5+2^x}{x^3+6^x}\right)(2^x+3^x)$

答案：

(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{2}{7}$　(3) 不存在极限　(4) 3　(5) 1　(6) 不存在极限

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^5+2^x}{x^3+6^x}\right)(2^x+3^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\left(\dfrac{\dfrac{x^5}{2^x}+1}{\dfrac{x^3}{6^x}+1}\right)3^x\left(\dfrac{2^x}{3^x}+1\right)=1$

【例题 2.5.6 基础题】设当$x\to+\infty$时，$f(x)$,$g(x)$都是无穷大，则下面说法正确的是：

A. $f(x)+g(x)$是无穷大

B. $f(x)-g(x)$是无穷小

C. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

D. $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)\cdot g(x)}$是无穷小

答案：D

2.6 极限求解思路梳理

在考试过程中遇到的绝大多数极限都可以归类为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”类型，其他的诸如“$\infty-\infty$”、“$\infty\cdot 0$”、“1^∞”等类型，其本质还是属于前面这两类。甚至可以说，**极限运算的核心就在于处理无穷大和无穷小**。

求解极限三步走：代入，分辨，化简

第一步，代入：将自变量极限值代入极限表达式；

第二步，识别：识别式中的无穷小量和无穷大量；

第三步，求解：选择分别适用的求解方法，进行化简或者变形。

无穷小的常用处理手段：抓“致 0 因子” / 等价无穷小代换 / 泰勒 / 抓大头 / 洛必达

无穷大的常用处理手段：抓大头 / 洛必达

“1^∞”类型极限特殊方法：还原 e 的特殊极限 / 利用$a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$转换形式 / $a^b=\mathrm{e}^{(a-1)b}$

【例题 2.6.1 基础题】计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}$

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{x}\right)=0+1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{x}\right)=2-1=1$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{x}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos x}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\ln\left[\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\ln\left[1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\pi}{2}$$

所以，原式$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

【例题 2.6.2 基础题】（2025 数学一 5 分）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}$

答案：-1

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{\ln x\cdot(-x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{\ln x\cdot(-x)}=-1$

泰勒展开

泰勒展开相关具体内容可见后续章节，我们可以把泰勒公式当作**“进阶版”的等价无穷小**代换来使用，需要大家掌握下面一些常用的泰勒展开：

等价无穷小代换($x\to 0$)	泰勒展开($x\to 0$)
$\sin x\sim x$	$\sin x\sim\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)$
$(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$	$\cos x\sim\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)$
$\tan x\sim x$	$\tan x\sim\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)$
$\ln(1+x)\sim x$	$\ln(1+x)\sim\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$
$(e^x-1)\sim x$	$e^x\sim\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$

之前我们强调，在涉及到加减法时我们不能随意使用等价无穷小代换，那么这时候泰勒展开可以轻松应对这种情况。

【例题 2.6.3 基础题】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

答案：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2\right)-1-\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)}{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2!}x^2}{\frac{1}{2!}x^2}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{3x^3}\right)\right]=\dfrac{1}{2}$

洛必达法则

洛必达法则：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

使用条件（需要以下条件同时满足）：

（1）当$x\to a$时，函数$f(x)$以及$g(x)$都趋于 0 或者都趋于∞；

（2）在点a的某**去心邻域**内，函数$f(x)$以及$g(x)$都可导，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=C$，其中 C 可以是一个确定的数字，也可以是无穷大。

【例题 2.6.4 基础题】解下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3^x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(2\arctan x-\pi)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+\sin x}{x}$

答案：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{3^x\ln 3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{3^x(\ln 3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{3^x(\ln 3)^3}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

补充说明：

a. 在第一个等号后，尽管$\ln x$、$\frac{1}{x}$在$x=0$处没有定义，在该点不存在导数，但是不妨碍我们使用洛必达法则进行求导。因为根据洛必达的条件（2），只要分子分母分别在$x=0$的去心邻域上可导即可。

b. 本题还可以令$t=\frac{1}{x}$，从而得到：$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-\frac{1}{t}}{1}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(2\arctan x-\pi)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\arctan x-\pi}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{1+x^2}=-2$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^0=1$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+\sin x}{x}=5$

注意此题不能用洛必达，否则会得到：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\cos x}{1}$，这时的极限既不是常数，也不是无穷大，违背了洛必达使用条件(3).

【例题 2.6.5 基础题】(2023 数学三 5 分）极限$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$

答案：$\frac{2}{3}$

失误重灾区：部分运算

【例题 2.6.6 中等题】计算以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3\sin^2x+e^x)}{\ln(2x^2+e^{2x})}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin^2x+e^x)-x}{\ln(2x^2+e^{2x})-2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(e^x-\cos x)\cdot\cos3x}{e^{-x}\ln(1+2x)}$

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3\sin^2x+e^x)}{\ln(2x^2+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3\sin^2x+e^x-1)}{\ln(1+2x^2+e^{2x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin^2x+e^x-1}{2x^2+e^{2x}-1}=\frac{1}{2}$

错误方法：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3\sin^2x+e^x)}{\ln(2x^2+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(3\sin^2x+1)}{\ln(2x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin^2x}{2x^2}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin^2x+e^x)-x}{\ln(2x^2+e^{2x})-2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(2x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2\sin^2x}{e^x}+1\right)}{\ln\left(\frac{2x^2}{e^{2x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2\sin^2x}{e^x}}{\frac{2x^2}{e^{2x}}}=1$

错误方法：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin^2x+e^x)-x}{\ln(2x^2+e^{2x})-2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin^2x+1)-x}{\ln(2x^2+1)-2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2x-x}{2x^2-2x}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

错误方法：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(e^x-\cos x)\cdot\cos 3x}{e^{-x}\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\cos 3x}{e^{-x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\ln(1+2x)}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

2.7 特殊形式的极限问题

无穷项求和

我们有时候会遇到下面这种类型的极限问题：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

在此为大家总结三个思路：

（1）合并：利用裂项相消、差比数列求和等方法，将无穷多项求和，转化为有限的一个表达式；

（2）放缩：将数列进行适当的放大和缩小，利用夹逼准则求得极限；

（3）定积分：基于定积分的定义，将无穷多项求和转化为定积分运算（后续内容中学习）；

（4）无穷级数法：利用函数幂级数展开，将表达式转化为函数运算（后续内容中学习）。

这些方法各有特色，在具体的解题过程中，我们要根据a_n的特点来选择合适方法。我们接下来通过例题体会前两种方法。

【例题 2.7.1 基础题】求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]^n$

答案：

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\frac{-n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}$

【例题 2.7.2 基础题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

根据差比数列求和，采用错位相减法进行处理：

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\frac{2}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$

【例题 2.7.3 基础题】求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1^2}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2^2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3^2}}+\cdots+\frac{n+n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)$$

答案：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}}[(n+1)+\cdots(n+n)] < 原式 < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1^2}}[(n+1)+\cdots(n+n)]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+n^2}} < 原式 < \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+1^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+1^2}} = \frac{3}{2}$$

所以原式结果为$\frac{3}{2}$.

【例题 2.7.4 基础题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2}+\ldots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}\right)$

$$n\cdot\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n+\frac{1}{i}}{n^2+i}\le n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+\frac{1}{i}}{n^2+i}=1$$

【例题 2.7.5 基础题】求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1^2}{n^3+n}+\frac{n^2+2^2}{n^3+2n}+\ldots+\frac{n^2+n^2}{n^3+n^2}\right)$

$$\frac{n\cdot n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n^2}\le\left(\frac{n^2+1^2}{n^3+n}+\frac{n^2+2^2}{n^3+2n}+\ldots+\frac{n^2+n^2}{n^3+n^2}\right)\le\frac{n\cdot n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}=\frac{4}{3}$$

所以原式结果为$\frac{4}{3}$.

整数幂和的规律：

$$1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1=\frac{1}{2}n^2+P_1(n)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+P_2(n)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^4+P_3(n)$$

……

其中$P_k(n)$表示n的k次多项式。

*Stolz（施笃兹）公式：

设$\{x_n\}$、$\{y_n\}$分别为两个数列，对于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$，如果满足数列$y_n$严格单调递增至$+\infty$，则有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

【例题 2.7.6 基础题】求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$

（1）设$x_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots\dfrac{1}{2n-1}$，$y_n=\ln n$，满足第一类型的 Stolz 公式，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\ln n-\ln(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{2}$$

（2）设$x_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$，$y_n=n^4$，满足第一类型的 Stolz 公式，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4-(n-1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{[n^3+n^2(n-1)+n(n-1)^2+(n-1)^3]}=\frac{1}{4}$$

数列递推

【例题 2.7.7 基础题】设$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}(n=1,2,\cdots)$，证明该数列存在极限并求该极限值。

答案：

①方法一，使用单调有界性进行证明。

$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+a_1}>\sqrt{2}$。假设$a_k>a_{k-1}(k\geqslant 2)$，则

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}>\sqrt{2+a_{k-1}}=a_k$$

根据数学归纳法得证数列$\{a_n\}$递增；

已知$a_1=\sqrt{2}<2$，假设$a_k\leqslant 2(k\geqslant 2)$，则有

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\leqslant\sqrt{2+2}=2$$

根据数学归纳法得证数列$a_n\leqslant 2$.

综上所述，数列$\{a_n\}$单调递增且有上界，则存在极限a，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以：$a=\sqrt{2+a}$，解得极限$a=2$.

②方法二，压缩映射定理（只适合选择、填空题）

压缩映射定理：如果$x_{n+1}=f(x_n)$，$f(x)$满足：$|f'(x)|\leq k<1$，则该数列收敛。

考研答题过程中，如果是证明题（需要写步骤），需要搭配后面的拉格朗日中值定理来写完整步骤。

【例题 2.7.8 拔高题】若$x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4$，且$x_n>0$，证明数列在极限并求该极限值。

答案：$x_{n+1}-x_n<4-x_n-\dfrac{4}{x_n}=4-\left(x_n+\dfrac{4}{x_n}\right)\leq 0$，由此可得该数列递减。

而$x_n>0$存在下界，根据单调有界法则，该数列存在极限。假设极限值为a，则有：当$n\to\infty$时，

$$a+\frac{4}{a}\leq 4$$

$$(a-2)^2\leq 0$$

所以解得$a=2$。

特殊变形

【例题 2.7.9 基础题】求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}\right]$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$$

【例题 2.7.10 基础题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$，其中$|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{(1-x)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{(1-x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

【例题 2.7.11 中等题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi-2n\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\pi\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\right)\pi\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例题 2.7.12 拔高题】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{1-\cos^3 x}$

答案：

分母部分：$1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)\sim\frac{3}{2}x^2$

分子部分：逆向使用等价无穷小代换，我们知道$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$，则有：

$$\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}-1\sim\ln\left(\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\right)$$

于是可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\frac{1}{3}\ln\cos 3x}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\frac{3}{2}x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln\cos 2x}{\frac{3}{2}x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\ln\cos 3x}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}4x^2}{\frac{3}{2}x^2}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}9x^2}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=2$$

利用极限的信息

【例题 2.7.13 基础题】已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x}{\tan^2 x}=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}$

方法一：从要求的极限表达式中凑出原有表达式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-\cos x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-\cos x)}{\tan x^2}\cdot\frac{\tan x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

方法二：等式变换法

根据$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x}{\tan^2 x}=1$，可得：当$x\to 0$时，$\frac{f(x)-\cos x}{\tan^2 x}\to 1$，

$\frac{f(x)-\cos x}{\tan^2 x}=1+a(x)$，其中$a(x)\to 0$.

$f(x)=\tan^2 x+\cos x+a\tan x^2\sim 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

由此可得：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$

【例题 2.7.14 基础题】已知极限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{\sin\pi x}=5$，求$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(3+x)-4e^{x+1}}{\ln(-x)}$

令$3+x=t$，于是有$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(3+x)-4e^{x+1}}{\ln(-x)}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{f(t)-4e^{t-2}}{\ln(3-t)}$

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-4e^{t-2}}{\ln(3-t)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4e^{x-2}}{\ln(3-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4+4-4e^{x-2}}{\sin\pi x}\cdot\frac{\sin\pi x}{\ln(3-x)}$$

$$=\left[\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{\sin\pi x}+\lim_{x\to 2}\frac{4-4e^{x-2}}{\sin\pi x}\right]\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{\ln(3-x)}$$

$$=\left(5-\frac{4}{\pi}\right)\frac{\pi}{-1}=4-5\pi$$

【例题 2.7.15 基础题】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$________.

答案：2

根据题目给出的极限结果，可得出：$x\to 0, x+\dfrac{f(x)}{x}=(3+a)x,\ f(x)=(2+a)x^2$，

其中a是无穷小量。由此可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+a)x^2}{x^2}=2$$

【例题 2.7.16 基础题】已知极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-b}{x^3-1}=\dfrac{5}{3}$，求参数$a$和$b$

由于$x\to 1$时，$(x^3-1)\to 0$，所以$x^2+ax-b\to 0$

可得：$1+a-b=0$，将$b=1+a$代入：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x^2+x+1}=\frac{2+a}{3}=\frac{5}{3}$$

由此可得：$a=3$，$b=4$

【例题 2.7.17 基础题】已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=1$，求参数$a$和$b$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}$$

可得方程组：

$$\begin{cases}1-a=0\\a+b=-1\end{cases}$$

所以$a=1,b=-2$.

【例题 2.7.18 中等题】已知$f(x)$为三次多项式，且有

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=9$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=-6$，求出$f(x)$以及$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{x-4}$

解：设$f(x)=A(x-1)(x-2)(x-B)$

根据题目信息可知：

$$-A(1-B)=9$$
$$A(2-B)=-6$$

解得：$A=3,B=4$

$$f(x)=3(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}3(x-1)(x-2)=18$$

【例题 2.7.19 基础题】（2021 数学三 10 分）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存

在，求a的值。

答案：

$$\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to0^+}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to0^-}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-1}$$

由此可知：

$$\lim_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{a\pi}{2}+\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{a\pi}{2}+\mathrm{e}^{-1}$$

$$\frac{a\pi}{2}+\mathrm{e}=-\frac{a\pi}{2}+\mathrm{e}^{-1}$$

$$a=\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{\pi}$$

2.8 函数连续的基本概念

连续函数的定义 1： 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果有

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

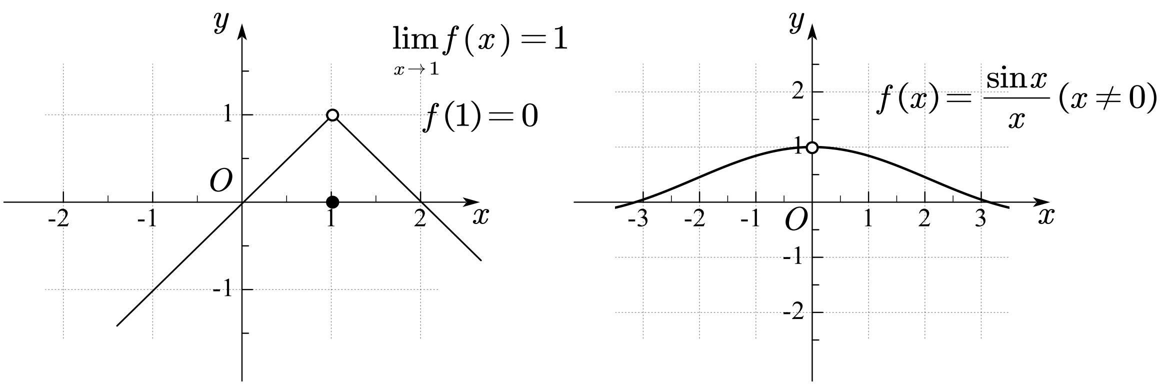
那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续函数的定义 2： 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

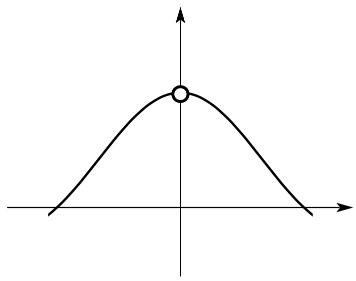
需要体会$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x_0)$之间的差异：



间断点的类型：

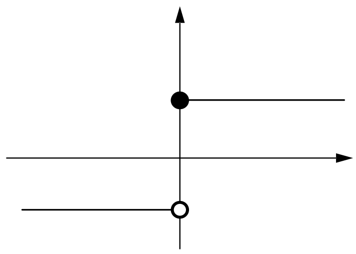
左右极限情况	具体情况
第一类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在	可去间断点：左右极限相等 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$
	跳跃间断点：左右极限不相等

	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
第二类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$不存在	无穷间断点：左极限或右极限为无穷大 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$
	振荡间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$不存在，也非无穷大



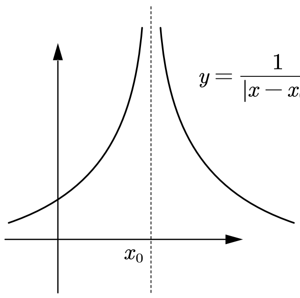
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$

可去间断点



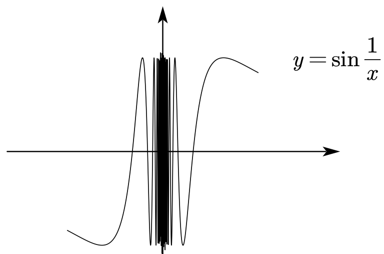
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

跳跃间断点



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

无穷间断点



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$振荡不收敛

振荡间断点

结论：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的。

这个结论也提醒我们，这些函数出现间断的地方只有两种可能性：**分段函数的分界处，定义域的边界**。

【例题 2.8.1 基础题】求函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的间断点，并判断其间断点类型。

改写$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}$

第一步：找到潜在的间断点（分段函数分界处、定义域边界）

函数$f(x)$的定义域为：$x\neq1, x\neq2$，那么$x=1, x=2$处为函数的间断点；

第二步：确定间断点的类型，即求间断点处的左、右极限： $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$

$x=1$处：$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)}{(x-2)}=-2$

$x=2$处：$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}=\pm\infty$

$x=1$处为可去间断点，$x=2$处为无穷间断点。

【例题 2.8.2 基础题】函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}(x^2-4x+3)}$ 的间断点个数为：

A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个

答案：A
此题有陷阱，它的定义域是 $x\in(-2,2), x\neq 1$。

【例题 2.8.3 基础题】（2024 数学二 5 分）函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数是（　　）

A. 3
B. 2
C. 1
D. 0

答案：C

解析：无定义的点为 1,2,0

$$\lim_{x\to1}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to2^-}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=+\infty$$

所以第一类间断点的个数是 1 个，故选 C.

【例题 2.8.4 基础题】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & x\neq1\\ b, & x=1\end{cases}$，确定参数 a、b，使得函数在 $x=1$ 处连续.

目的是使：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=b$

$$\lim_{x\to1}\frac{ax-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=b$$

（此处注意，因为分母为“0”，要使极限值存在，则分子也必须为“0”，得到下行式子）

$\lim\limits_{x\to1}(ax-1)=0, a-1=0, a=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{2}=2$$

$b=2$

【例题 2.8.5 中等题】讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，则判别其类型。

需要先求得有关n的极限：

$$f(x)=\begin{cases}-x, & |x|>1\\ 0, & x=1\\ x, & |x|<1\end{cases}$$

在$x=-1$处：$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1$，$f(-1)=0$

在$x=1$处：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，$f(1)=0$

于是在$x=-1$、$x=1$处均为跳跃间断点。

【例题 2.8.6 中等题】（2024 数学三 5 分）设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则$f(x)$（　）

A. 在$x=1,x=-1$处都连续

B. 在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C. 在$x=1,x=-1$处都不连续

D. 在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

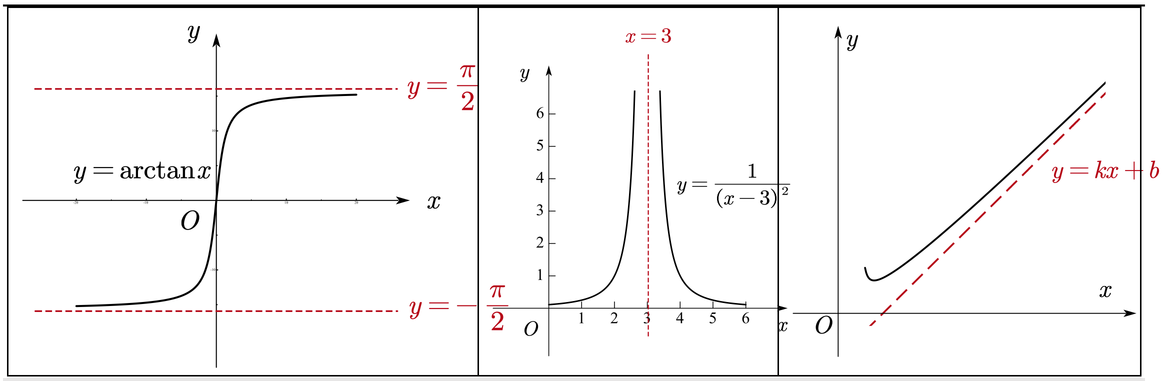
答案：D

因为分段计算极限结果，可得：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+nx^{2n}}=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

2.9 渐近线

水平渐近线 $y=c$	铅直渐近线 $x=a$	斜渐近线 $y=kx+b$
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$	$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$



【例题 2.9.1 基础题】求函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-7x+12}$ 的渐近线。

解：（1）水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-7x+12}$ 没有极限值，不存在水平渐近线

（2）铅直渐近线：$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-7x+12}=\dfrac{x^3}{(x-3)(x-4)}$，在 $x\to3$ 和 $x\to4$ 时，

$f(x)\to\infty$，故 $x=3$，$x=4$ 分别为铅直渐近线；

（3）斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-7x+12}=1$，

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^3+7x^2-12x}{x^2-7x+12}=7$

所以斜渐近线为 $y=x+7$

【例题 2.9.2 基础题】（2023 数学一/数学二 5 分）曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x-1})$ 的斜渐近线方程为（　）

A. $y=x+e$　　B. $y=x+\frac{1}{e}$

C. $y=x$　　D. $y=x-\frac{1}{e}$

答案：B
极限计算过程：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x-1})}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x-1})=\ln e=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln(e+\frac{1}{x-1})-1x\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(e+\frac{1}{x-1})-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(e+\frac{1}{x-1})-\ln e\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{e(x-1)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e(x-1)}=\frac{1}{e}$$

【例题 2.9.3 基础题】（2025 数学二 5 分）曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为________.

答案：$y=x-1$
解析：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-1$$

【例题 2.9.4 基础题】（2025 数学三 5 分）设$g(x)$是函数$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$的反函数. 则曲线$y=g(x)$的渐近线方程为______.

答案：$y=3$和$y=-3$.

解析：此题可以先求反函数，再取渐近线计算。但是也可以直接求$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$的渐近线，发现它有两条铅直渐近线：$x=\pm 3$，利用反函数图像性质，$y=g(x)$的渐近线就是$y=\pm 3$。

第3讲 导数概念与计算

3.1 导数基本定义与性质

导数的定义

设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域有定义，若极限

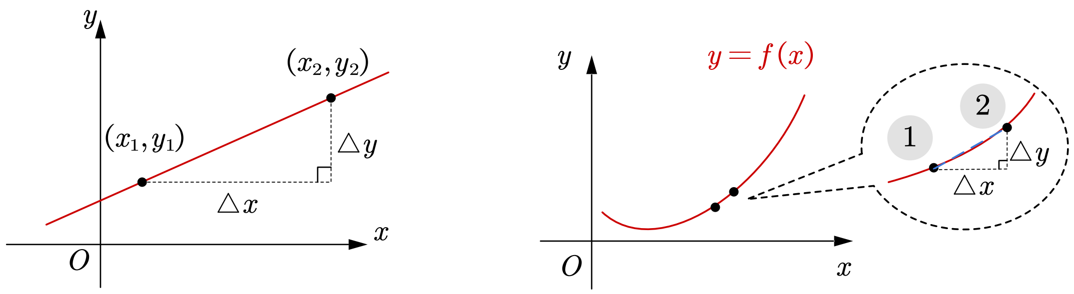
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{ 或 }\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称$f(x)$在点x_0处可导，并称这个极限值为$f(x)$在点x_0处的导数，记作

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\text{ 或 }\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

若上式的极限不存在，则称$f(x)$在点x_0处不可导。

导数反映出因变量随着自变量增长而变化的快慢。在函数曲线中，导数就是将曲线微分化后，某一微元直线段的斜率，如下图所示。导数也被叫做“微商”，就是两个无穷小量之间的比值。



$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad f'=\frac{\Delta y}{\Delta x}\ (\Delta x\to 0)$$

式中的“$\mathrm{d}x$”、“$\mathrm{d}y$”就是分别指无穷小状态下的“Δx”、“Δy”

利用函数的定义以及极限的计算，不难推导下列基本函数的导函数：

(1) $y=\sin x$

(2) $y=\mathrm{e}^x$

(3) $y=x^n\ (n>1)$

（1）$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}\sin x+\Delta x\cos x}{\Delta x}=\cos x$$

（2）$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\Delta x}{\Delta x}=\mathrm{e}^x$

（3）

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{n}{1!}\cdot x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

函数曲线的切线与法线：对于函数曲线$y=f(x)$，如果其在$x=x_0$处存在导数$f'(x_0)$，则过点$(x_0,f(x_0))$、斜率为$f'(x_0)$的直线，被称为$y=f(x)$在该点处的切

线。过点$(x_0,f(x_0))$、与切线垂直的线（斜率为$-\frac{1}{f'(x_0)}$）为法线。

导数常规计算

常见函数的导数总结：

$$(c)'=0(c\text{为常数})$$
$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$
$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$
$$(a^x)'=a^x\ln a(a>0)$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\sin x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cot x$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

导数四则运算法则：如果函数$f(x)$与$g(x)$各自存在导数，则有：

- $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
- $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ （$g(x)\neq0$）

【基础题】求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\ln 3$

(2) $y=x^2\ln x\cos x$

答案：

（1）$y'=\frac{x^2(\mathrm{e}^x)'-(x^2)'\mathrm{e}^x}{(x^2)^2}+0=\frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x)}{x^4}=\frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$

（2）

$y'=(x^2)'\ln x\cos x+x^2(\ln x)'\cos x+x^2\ln x(\cos x)'=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$

复合函数求导（链式法则）：如果函数$f(x)$与$g(x)$各自存在导数，则有：

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例如$y=\sin(x^2)$，我们可以认为是两个函数$f(x)=\sin x$与$g(x)=x^2$的嵌套，记为：$y=f[g(x)]$.

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x$$

这其中蕴含着**求导链式法则**，即：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

设置中间变量，设$y=\sin u$，$u=x^2$，那么则有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\sin u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot 2x=\cos x^2\cdot 2x$$

【例题 3.1.1 基础题】求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$

(2) $y=x^x$

答案：

（1）$y'=-6x\mathrm{e}^{-3x^2}$

（2）$y=\mathrm{e}^{x\ln x}$，$y'=\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot(1+\ln x)$.

【例题 3.1.2 基础题】（2021 数学三 5 分）若 $y=\cos\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$

答案：$\frac{\sin\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{e}}$

解析：$y'=-\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

导数与极限

给出一个函数$f(x)$，判断其在$x=a$处是否可导，关键就在于下列极限是否存在：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

如果上述极限区分$x\to a^-$与$x\to a^+$，则极限结果分别是左导数和右导数：

$$\text{左导数：}f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$\text{右导数：}f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

函数$f(x)$在$x=a$处可导⇔左导数与右导数存在且相等。

函数$f(x)$在$x=a$处可导⇒函数$f(x)$在$x=a$处连续。

典型的连续但不可导的情况：

（1）$y=|x|$ 在 $x=0$ 处

$$\text{右导数：}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\text{左导数：}\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

（2）$y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\infty$$

导数存在就是极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$存在，前提是$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$，即函数在该点连续。所以**函数连续是函数可导的前提**。

对于导数极限的定义，我们可以将其进一步推广：

$$f'(a)=\frac{f\left(a+\text{无穷小}\right)-f(a)}{\text{无穷小}}$$

上式如果要成立，需要注意要满足以下三点：

（1）分子分母出现的两个“无穷小”必须**相同**或是**等价无穷小**；

（2）该无穷小必须“**可正可负**”，否则代表的就是单侧导数（左导数或者右导数）。

【例题 3.1.3 基础题】判断下列说法正确的是______.

(1) $f(x)$在$x=a$处的导数为$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(2x-a)-f(a)}{2x-2a}$

(2) $f(x)$在$x=a$处的导数为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+\sin x)-f(a)}{x}$

(3) $f(x)$在$x=a$处的导数为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^2)-f(a)}{x^2}$

(4) $f(x)$在$x=a$处的导数为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}$

(5) 已知$f(x)$在$x=a$处可导，$f(x)$在$x=a$处的导数为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+mx)-f(a-nx)}{(m+n)x}$（$m+n\neq 0$）

答案：(1) (2) (5)

(1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(2x-a)-f(a)}{2x-2a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f[a+(2x-2a)]-f(a)}{2x-2a}$，将$(2x-2a)$看作无穷小即可，符合导数定义的本质。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+\sin x)-f(a)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+\sin x)-f(a)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}$，符合导数定义的本质。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^2)-f(a)}{x^2}$中，$x^2$是正的无穷小，该式只能表示$(x)$在$x=a$处的右导数。

(4) 不可以，它容易导致$\frac{1}{x^2}$、$|x|$这种函数在$x=0$处可导的错误结论。

(5) 在已知$x=a$处可导的情况下，该表达式等效于$f'(a)$，因为可以视作：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(a+mx)-f(a-nx)}{(m+n)x}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+mx)-f(a)]+[f(a)-f(a-nx)]}{(m+n)x}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{f(a+mx)-f(a)}{(m+n)x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(a)-f(a-nx)}{(m+n)x}\\=&\frac{m}{m+n}f'(a)+\frac{n}{m+n}f'(a)=f'(a)\end{aligned}$$

【例题 3.1.4 基础题】（2021 数学一/数学二/数学三 5 分）函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极小值
B. 连续且取得极大值
C. 可导且导数等于零
D. 可导且导数不为零

答案：D
解析：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

【例题 3.1.5 拔高题】（2025 数学二 5 分）设函数 $f(x)$ 连续，给出下列四个条件：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$ 存在；　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在.

其中能得到"$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导"的条件的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：D

解析：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导意味着 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在，而函数 $f(x)$ 连续可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$。

为了去掉绝对值符号，可以分三种情况讨论：

① $f(0)>0$　　② $f(0)<0$　　③ $f(0)=0$

【例题 3.1.6 基础题】已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-e^x}{\sin x}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=2$$

方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1+1-e^x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}=2-1=1$$

方法二：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=2$，$x\to 0$ 时：$f(x)=2x+1+o(x)$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-e^x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1+o(x)-e^x}{\sin x}=1$

错误方法：洛必达！本题不适用洛必达，洛必达使用条件必须是给出在$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的去心邻域内可导，题目提供的条件不够。

在这里提两个容易犯错误的点：

（1）函数$f(x)$在$x=a$处连续，不意味着在其周围某个邻域内$(a-\delta,a+\delta)$内也会连续。

举例：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}_+,p与q互质)\\ 1, & x=0\\ 0, & x为无理数\end{cases}$，该函数仅在无理数点处连续。

（2）函数$f(x)$在$x=a$处可导，不意味着在其周围某个邻域内$(a-\delta,a+\delta)$内也会可导。

举例：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x为无理数\\ 0, & x为有理数\end{cases}$，该函数在$x=0$处可导，在其他任意点处均不可导。

这两个举例函数有些罕见，不需记住。

【例题 3.1.7 基础题】已知连续函数$f(x)$有$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-1}=1$，求$x=1$处的函数切线。

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

由于$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-1}=1$，分母为无穷小，则$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$，$f(1)=0$

所以：$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)}=1$$

所以$f'(1)=3$. 切线为：$y=3x-3$

【例题 3.1.8 基础题】已知连续函数$f(x)$有$f(1)=3,f'(1)=5$，求$\lim\limits_{x\to\mathrm{e}}\frac{f(\ln x)-3}{\sin(x-\mathrm{e})}$

方法一：$f'(1)=5$，则对应极限有$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=5$

$\lim\limits_{x\to\mathrm{e}}\frac{f(\ln x)-3}{\sin(x-\mathrm{e})}$，令$\ln x=t$，于是有：

$$\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{f(\ln x)-3}{\sin(x-\mathrm{e})}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-3}{\sin(\mathrm{e}^t-\mathrm{e})}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-3}{t-1}\cdot\frac{t-1}{\sin(\mathrm{e}^t-\mathrm{e})}=\frac{5}{\mathrm{e}}$$

方法二：

$$\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{f(\ln x)-3}{\sin(x-\mathrm{e})}=\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{f(1+\ln x-1)-f(1)}{\ln x-1}\cdot\frac{\ln x-1}{\sin(x-\mathrm{e})}=5\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{5}{\mathrm{e}}$$

【例题 3.1.9 拔高题】（2025 数学二/数学三 12 分）设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$$

证明$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

答案：$f(x)$在$x=0$处连续，意味着有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，而：

$$x\to 0,\ \frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3+a\ (a\text{为无穷小量})$$

$$x\to 0,f(x)=\frac{(-3+a)\,[\ln(1+x)+\ln(1-x)]+e^{2\sin x}-1}{x}$$

则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-3+a)\,[\ln(1+x)+\ln(1-x)]+e^{2\sin x}-1}{x}=2$

所以$f(0)=2$，进一步求导数：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(-3+a)\,[\ln(1+x)+\ln(1-x)]+e^{2\sin x}-1}{x}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-3+a)\,[\ln(1+x)+\ln(1-x)]+e^{2\sin x}-1-2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-3+a)\,[\ln(1+x)+\ln(1-x)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1-2x}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{前泰勒，后洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{(-3+a)\left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)\right]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\,e^{2\sin x}-2}{2x}$$

$$=3+\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\,e^{2\sin x}+4\cos^2 x\,e^{2\sin x}}{2}=5$$

【例题 3.1.10 基础题】判断函数$y=\sqrt[3]{x}\sin x$在$x=0$处是否可导

根据定义，可得 0 处的导数

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}\sin\Delta x-0}{\Delta x}=0$$

得出在$x=0$处可导,导数值为 0。

【错误方法】根据函数计算乘法法则，可得到：

$$y'=\left(\sqrt[3]{x}\sin x\right)'=\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\cos x$$

此时x出现在分母上，不能取 0，所以不存在导数。
该方法错误地使用了$(uv)'=u'v+uv'$，忽略了它的使用条件。

【例题 3.1.11 基础题】判断函数$y=(x^2-2x-8)\cdot|x^2-6x+8|$在$x=2$和$x=4$处分别是否可导？

$$y=(x-4)(x+2)\cdot|x-4|\cdot|x-2|$$

$x=2$处：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-4)(x+2)\cdot|x-4|\cdot|x-2|}{x-2}=-16\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$，左右极限分别为-1 和 1，不可导；

$x=4$处：$\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)\cdot|x-4|\cdot|x-2|}{x-4}=0$，可导。

带有绝对值的函数的可导性的问题：设函数$f(x)=u(x)\cdot|x-a|$，$f(x)$在$x=a$处可导的充要条件是$\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$.

【例题 3.1.12 基础题】（2018 数学一/数学二/数学三 4 分）下列函数中，在$x=0$处不可导的是

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$.

（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

（C）$f(x)=\cos|x|$.

（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

答案：D

【例题 3.1.13 基础题】函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，请判断该函数在$x=0$处：

①是否连续 ②是否可导 ③导函数是否连续

①$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，故连续

②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$，故导数存在，且导数值为 0

③由上述过程可知：

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

而$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$不存在，所以$\lim\limits_{x\to 0}f'^{(x)}\neq f'(0)$，导函数不连续。

【例题 3.1.14 基础题】以下说法正确的个数是：

(1) 函数$f(x)$在$x=a$处连续，则$f(x)$在$x=a$处存在某一邻域内使$f(x)$有定义；

(2) 函数$f(x)$在$x=a$处连续，则$f(x)$在$x=a$处存在某一邻域内使$f(x)$连续；

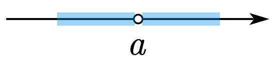
(3) 函数$f(x)$在$x=a$处可导，则$f(x)$在$x=a$处存在某一邻域内使$f(x)$连续；

(4) 函数$f(x)$在$x=a$处二阶可导，则$f(x)$在$x=a$处存在某一邻域内使$f(x)$可导。

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案：B (1)(4)正确，(2)(3)错误。

首先我们要了解以下关于$f(x)$的逻辑关系：

$f(x)$在$x=a$处可导	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$存在
⇓	
$f(x)$在$x=a$处连续	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$
⇓	
$f(x)$在$x=a$处存在极限	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$
⇓	
$f(x)$在$x=a$去心邻域有定义	

而$f(x)$在$x=a$处二阶可导，可以理解为$f'(x)$在$x=a$处可导，于是：

$f'(x)$ $x=a$处可导 ⇒ $f'(x)$ $x=a$处连续 ⇒ $f'(x)$ $x=a$处存在极限 ⇒ $f'(x)$在$x=a$去心邻域有定义

【例题 3.1.15 基础题】（2024 数学一 5 分）设函数$f(x)$在区间$(-1,1)$上有定义，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则（　）

A. 当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$时，$f'(0)=m$；

B. 当$f'(0)=m$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$；

C. 当$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$时，$f'(0)=m$；

D. 当$f'(0)=m$时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$。

答案：B

A 选项中，题目条件不能保证$f(0)=0$；

B 选项$f'(0)=m$，说明$x=0$处可导、连续，可知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$；

C、D 选项中，认为f'是连续的，条件不够。

3.2 隐函数的导数

设有二元方程$F(x,y)=0$，若在区间I上存在函数$y=y(x)$满足$F(x,y(x))=0$，则称这个函数$y=y(x)$为方程$F(x,y)=0$在区间I上确定的隐函数。
求隐函数导数方法：将方程两端同时对自变量（如x）求导，在求导过程中，自始至终把y视为x的函数（$y=y(x)$），由复合函数求导法导出y'满足的方程，然后解出y'。

【例题 3.2.1 基础题】

(1) 设$y=y(x)$是由方程$y-xe^y=1$确定的，求$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) $y=\sqrt{(1+x)(2x+3)(5x+6)}$，求$y'$.

（1）方程$y-xe^y=1$左右两侧对 x 求导，得：

$$(y-xe^y)'=(1)$$
$$'y'-[x(e^y)'+(x)'e^y]=0$$
$$y'-(xe^y y'+e^y)=0$$
$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}$$

$y'=\frac{e^y}{2-y}$左右两侧再对 x 求导：

$$y''=\frac{d}{dy}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{e^y(3-y)}{(2-y)^2}\cdot y'=\frac{e^y(3-y)}{(2-y)^2}\cdot\frac{e^y}{2-y}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

（2）

$$\ln y=\ln\left[\sqrt{(1+x)(2x+3)(5x+6)}\right]=\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln(2x+3)+\frac{1}{2}\ln(5x+6)$$

左右两侧对 x 求导，得：

$$(\ln y)'=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln(2x+3)+\frac{1}{2}\ln(5x+6)\right]'$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5x+6}$$
$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2x+3}+\frac{5}{5x+6}\right)$$
$$y'=\frac{\sqrt{(1+x)(2x+3)(5x+6)}}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2x+3}+\frac{5}{5x+6}\right)$$

【例题 3.2.2 基础题】（2023 数学二 5 分）曲线$3x^3=y^5+2y^3$在$x=1$处对应的法线斜率为______.

答案：$-\frac{11}{9}$

【例题 3.2.3 基础题】（2022 数学二 5 分）已知函数$y=y(x)$由方程

$x^2+xy+y^3=3$确定，则$y''(1)=$

答案：$-\frac{31}{32}$

3.3 反函数求导

$y=f(x)$在区间I_x内可导且$f'(x)\neq 0$，则$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$的导数为：

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

例如下列函数的导函数推导过程：$y=\arcsin x$，其中$-1\le x\le 1,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$，有：

$$x=\sin y$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos y}$$

而$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$，于是得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

【例题 3.3.1 中等题】已知二阶可导的单调函数$f(x)$，分别有$f(1)=3$，$f'(1)=5$，$f''(1)=2$，设$g(x)=f^{-1}(x)$，求$g(3),g'(3)$和$g''(3)$

解：

方法一：设变量关系$y=f(x)$，则有$x=g(y)$，$x=1,y=3$，所以$g(3)=1$

可知$g'(y)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{f'(x)}$，$g''(y)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$，$g''(3)=-\dfrac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\dfrac{2}{125}$

方法二：$x=g(f(x))$

左右两侧求导数，可得：$1=g'(f(x))\cdot f'(x)$

再次求导，可得：$0=g''(f(x))\cdot[f'(x)]^2+g'(f(x))\cdot f''(x)$

整理上面两个式子：$g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$

$$g''(f(x))=-\frac{g'(f(x))\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}=-\frac{\frac{1}{f'(x)}\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

同样可得：$g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$，$g''(3)=-\dfrac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\dfrac{2}{125}$

【例题 3.3.2 拔高题】设二阶可导的单调函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)=g(x)$，已知$f(2)=5$，$f'(2)=7$，设函数$u(x)=g(3x+2)$，试求$u'(1)$

解：

$$u(x)=g(3x+2)$$

左右两侧求导数：

$$u'(x)=3g'(3x+2)$$
$$u'(1)=3g'(5)$$

而：

$$x=g(f(x))$$

左右两侧求导数，于是有：

$$1=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

$$g'(5)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{7}$$

于是：$u'(1)=3g'(5)=\frac{3}{7}$

3.4 参数方程求导（仅数学一、数学二）

给定参数方程组$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases},t\in I$，如果$f(t)$和$g(t)$在$t\in I$时均可导且$g'(t)\neq 0$，

则有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

【例题 3.4.1 基础题】设$y=y(x)$由下列参数方程确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

$$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$$

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2t)=\frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2(1+t^2)$$

【例题 3.4.2 基础题】（2021 数学一/数学二 5 分）设函数$y=y(x)$由参数方程

$\begin{cases} x=2\mathrm{e}^t+t+1, \\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$

答案：$\frac{2}{3}$

解析：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1}\xrightarrow{t=0}\frac{2}{3}$

【例题 3.4.3 基础题】求曲线$\rho=2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{4}$处的切线斜率.

【错误解法】$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=2$，切线斜率为 2。

方法一：将曲线方程转换为直角坐标方程，根据$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x}$:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\arctan\frac{y}{x}$$

进而隐函数求导，后续过程略。

方法二：我们根据方程，可以得到：

$$x = r\cos\theta = 2\theta\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta = 2\theta\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{\theta\cos\theta + \sin\theta}{-\theta\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4} + 1}{-\frac{\pi}{4} + 1}$$

【例题 3.4.4 中等题】（2023 数学一/二 5 分）设函数$y = f(x)$由$\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t|\sin t \end{cases}$确定，则（　）

A. $f(x)$连续，$f'(0)$不存在　　B. $f'(0)$存在，$f'(x)$在$x = 0$处不连续

C. $f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　　D. $f''(0)$存在，$f''(x)$在$x = 0$处不连续

答案：C

将参数方程组换元为$y = f(x)$：当$t \geq 0$时，$\begin{cases} x = 3t \\ y = t\sin t \end{cases}$；当$t < 0$时，

$\begin{cases} x = t \\ y = -t\sin t \end{cases}$。可得：

$$y = \begin{cases} \frac{x}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & x \geq 0 \\ -x\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

该函数满足：

①连续：在$x = 0$处，有$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$；在$x \neq 0$处，该函数保持连续性；

②可导：在$x = 0$处，有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$，导数为 0；在$x \neq 0$处，

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{9}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & x > 0 \\ -\sin x - x\cos x, & x < 0 \end{cases}$$

③导数的连续性：

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{9}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sin x - x\cos x, & x < 0 \end{cases}$$

该函数（指y'）是连续的。

④二阶导数：对y'求$x = 0$处的导数：

$$\lim_{x\to 0}\frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0}\text{不存在}$$

所以$f''(0)$不存在。

【例题 3.4.5 基础题】（2024 数学二 5 分）设函数$y = f(x)$由参数方程

$\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = \mathrm{e}^{t^2} \end{cases}$ 确定，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right]$

A. $2\mathrm{e}$　　B. $\frac{4\mathrm{e}}{3}$

C. $\frac{2\mathrm{e}}{3}$　　D. $\frac{\mathrm{e}}{3}$

答案：B

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right] \xlongequal{\frac{2}{x}=t} 2\lim_{t\to0^+}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}=2f'(2)$$

$$f'(2)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\left.\frac{2t\mathrm{e}^{t^2}}{3t^2}\right|_{t=1}=\frac{2\mathrm{e}}{3}$$

3.5 高阶导数

以下为常见函数的高阶导数：

$$(x^a)^{(n)} = a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdots x^{a-n}(a\geq n)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\mathrm{e}^{ax+b})^{(n)} = a^n\mathrm{e}^{ax+b}$$

$$[(ax+b)\mathrm{e}^x]^{(n)} = (ax+b+na)\mathrm{e}^x$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

莱布尼茨公式：如果函数$u(x)$、$v(x)$分别具有n阶导数，那么两者乘积的n阶导数为如下形式：

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(n)}$$

$$= C_n^0u^{(n)}v + C_n^1u^{(n-1)}v' + C_n^2u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}$$

$$+ C_n^nv^{(n)}u = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}\cdot v^{(n-k)}$$

以三阶导数为例：

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(3)} = C_3^0u^{(0)}v^{(3)} + C_3^1u^{(1)}v^{(2)} + C_3^2u^{(2)}v^{(1)} + C_3^3u^{(3)}v^{(0)}$$
$$= u^{(0)}v^{(3)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + u^{(3)}v^{(0)}$$

掌握莱布尼茨公式并不难，它类似于我们高中的“二项式定理”：

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

【例题 3.5.1 基础题】求函数$y = x^2\sin x$的 10 阶导数$y^{(10)}$

$y^{(10)} = (x^2\sin x)^{(10)}$

$$= C_{10}^0 x^2 \sin\left(x+\frac{10}{2}\pi\right) + C_{10}^1 2x\sin\left(x+\frac{9}{2}\pi\right) + C_{10}^2 2\sin\left(x+\frac{8}{2}\pi\right) + \cdots$$
$$= -x^2\sin x + 20x\cos x + 90\sin x$$

【例题 3.5.2 基础题】（2024 数学二 5 分）已知函数 $f(x)=(e^x+1)x^2$，则

$f^{(5)}(1)=$__________

答案：31e

利用莱布尼茨高阶导数公式计算即可。

【例题 3.5.3 基础题】求函数 $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$

$$y=\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

结合上题结论，可知：

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}$$

【例题 3.5.4 基础题】（2022 数学三 5 分）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则

$f'''(2\pi)=$________.

答案：0

解析：可逐阶导数运算。但是这里我们有一个便捷方法：

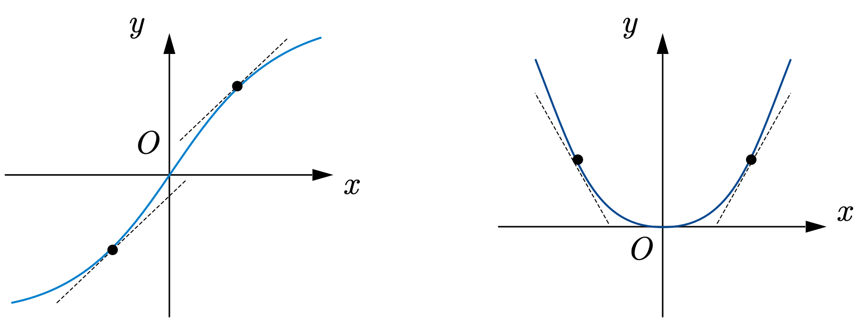
①函数 $f(x)$ 是周期函数，周期为 2π，所以 $f'''(2\pi)=f'''(0)$；

②函数 $f(x)$ 是偶函数，在 $x=0$ 处的奇数阶导数值为 0.

导数的奇偶特性：

（1）如果函数 $f(x)$ 为奇函数，在其定义域内可导，则导数 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）如果函数 $f(x)$ 为偶函数，在其定义域内可导，则导数 $f'(x)$ 为奇函数。



我们可以推理一下：设 $f(x)$ 为奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$，进而：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x)$$

同理可验证偶函数的导数对应为奇函数。

【例题 3.5.5 基础题】设函数$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，则$f^{(6)}(0)=$__________.

不难判断$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$为奇函数，则其一阶导数为偶函数，二阶导数为奇函数，以此类推，六阶导数也是奇函数，过$(0,0)$点，于是$f^{(6)}(0)=0$.

【例题 3.5.6 中等题】

（1）设函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}+2$，$f^{(5)}(1)=$__________.

（2）设函数$f(x)=\sin(x+2)^3-3$，$f^{(6)}(-2)=$__________.

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}+2=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}+2$相当于将$y=\dfrac{1}{x^2+1}$这个偶函数，向右平移一个单位，又向上平移了 2 个单位，所以该函数图像是关于$x=1$对称的，所以$f^{(5)}(1)=0$.

（2）$f(x)=\sin(x+2)^3-3$相当于将$y=\sin(x^3)$这个奇函数向左平移两个单位，又向下平移 3 个单位，所以该函数是关于$(-2,-3)$点对称的，进而$f^{(6)}(-2)=0$.

关于函数的轴对称、点对称，我们不妨再拓展一下：

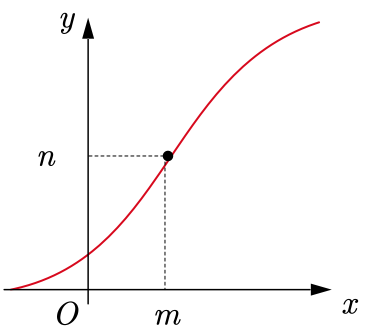
函数$f(x)$如果满足：

（1）$f(m+x)=f(m-x)$，则函数图像$y=f(x)$关于$x=m$轴对称；

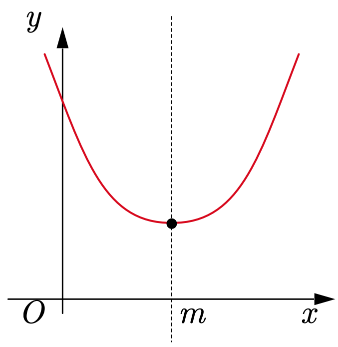
（2）$f(m+x)+f(m-x)=2n$，则函数图像$y=f(x)$关于(m,n)点对称；

（3）$f(a+x)=f(b-x)$，则函数图像是关于$x=\frac{a+b}{2}$轴对称；

（4）$f(a+x)+f(b-x)=2n$，则函数图像$y=f(x)$关于$\left(\frac{a+b}{2},n\right)$点对称。



关于(m,n)点对称



关于$x=m$轴对称

【例题 3.5.7 基础题】求下列高阶导数：

（1）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中是 5 阶可导的，且$f(x)$满足$f(2+x)=f(4-$

x)，求$f^{(5)}(3)$

（2）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中是 6 阶可导的，且$f(x)$满足$f(3+x)+f(7-x)=4$，求$f^{(6)}(5)$

答案：

（1）函数$f(x)$关于$x=3$轴对称，在$x=3$处应奇数阶导数为 0.

（2）函数$f(x)$关于$(5,2)$轴对称，在$x=5$处应偶数阶导数为 0.

两者均为 0.

【例题 3.5.8 中等题】设函数$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$，求$f^{(4)}(0)$.

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

而有：$f(x)+f(-x)=1$，于是两者是关于$\left(0,\frac{1}{2}\right)$点对称

$$f^{(4)}(0)=0$$

【例题 3.5.9 基础题】$f(x)=x^3|x|$在$x=0$处最多存在几阶导数？

答案：$f(x)=x^3|x|$为例，可将其理解为分段函数：

$$f(x)=\begin{cases} x^4, & x\ge 0 \\ -x^4, & x<0 \end{cases}$$

可分别推导得出：

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3, & x\ge 0 \\ -4x^3, & x<0 \end{cases},\ f''(x)=\begin{cases} 12x^2, & x\ge 0 \\ -12x^2, & x<0 \end{cases},\ f^{(3)}(x)=\begin{cases} 24x, & x\ge 0 \\ -24x, & x<0 \end{cases}$$

而四阶导数时：

$$f^{(4)}(x)=\begin{cases} 24, & x>0 \\ -24, & x<0 \end{cases}$$

在$x=0$处左、右导数不同，所以此处不存在 4 阶导数。

分段函数的导数计算：设$f(x)=\begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x\le x_0 \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$，其中$C$为某常数，若

$f(x)$在定义域内是连续的，且$g'_-(x_0)=h'_+(x_0)$，则$f'(x_0)=A$.

第4讲 导数的基本应用

4.1 函数曲线性质

单调性与极值点

单调性定义：对于函数$f(x)$，如果定义域内任取两点$a,b(a \neq b)$，
(1) $[f(a)-f(b)](a-b)>0$，则该函数为单调递增函数；
(2) $[f(a)-f(b)](a-b)<0$，则该函数为单调递减函数。

利用导数判定单调性：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且在(a,b)内的任意子区间上$f'(x) \neq 0$：如果$f'(x) \geqslant 0, x \in (a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$单调递增；如果$f'(x) \leqslant 0, x \in (a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$单调递减。

求函数的单调区间的常规方法：首先求出$f(x)$的驻点及不可导点（即$f'(x)=0$和$f'(x)$不存在的点），只有驻点与不可导点可能是单调区间的分界点；讨论$f'(x)$在每个子区间内的符号。

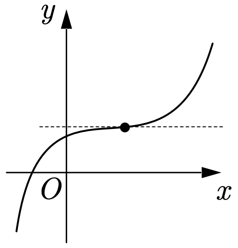
函数极值点定义：若$\exists \delta>0$，使得当$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$时有$f(x) \leq f(x_0)\left(\text{或 } f(x) \geq f(x_0)\right)$，则称点$x=x_0$是$f(x)$的极大（小）值点，$f(x_0)$称为$f(x)$的极大（小）值。极值点可能出现在$f'(x)=0$和$f'(x)$不存在的位置。

【例题 4.1.1 基础题】求函数单调区间与极值点：$y=-x^4+2x^2$

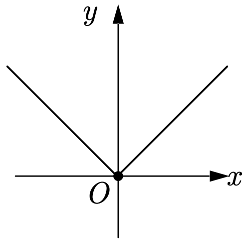
答案：$y'=-4x^3+4x=4x(1+x)(1-x)$
当$x<-1$时，$y'>0$；当$-1<x<0$时，$y'<0$；当$0<x<1$时，$y'>0$；当$x>1$时，$y'<0$.
单调递增区间为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$，单调递减区间为$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.
在$(-1,1)$、$(1,1)$处为极大值，$(0,0)$处为极小值。

【例题 4.1.2 基础题】以下说法正确的是__________.（填序号）
(1) 函数$f(x)$有$f'(a)=0$，则在$x=a$处为极值点；
(2) 函数$f(x)$在$x=a$处为极值点，则有$f'(a)=0$;
(3) 函数$f(x)$，当$x<a$时$f'(x)>0$，当$x>a$时$f'(x)<0$，则在$x=a$处为极大值点；
(4) 函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，且导数大于0，则$f(x)$在区间(a,b)内单调递增；
(5) 函数$f(x)$在区间(a,b)内单调递增，则在区间(a,b)内$f'(x) \geq 0$。

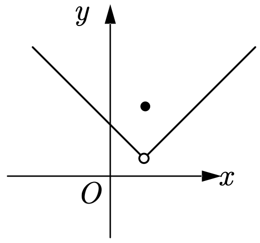
答案：(4)
解析：需要学生熟悉以下几个常见案例：



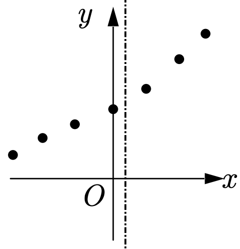
导数为0
但不是极值点



是极值点
但不存在导数



左递减、右递增
但不是极小值



递增，但不存在导数
（只在有限点有定义）

【例题 4.1.3 中等题】已知函数$f(x)$、$g(x)$在$x=0$处连续，且存在极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\cos x-1}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{e^x-1}=3$，下列说法正确的是_________．（填序号）

（1）　函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值；
（2）　函数$f(x)$在$x=0$处取得极小值；
（3）　函数$f(x)$在$x=0$处不为极值点；
（4）　不确定函数$f(x)$在$x=0$处是否为极值点；
（5）　函数$g(x)$在$x=0$处取得极大值；
（6）　函数$g(x)$在$x=0$处取得极小值；
（7）　函数$g(x)$在$x=0$处不为极值点；
（8）　不确定函数$g(x)$在$x=0$处是否为极值点。

答案：（1）（7）

解析：从极限情况不难得出，$f(0)=1, g(0)=-2$。而通过极限进一步解读：

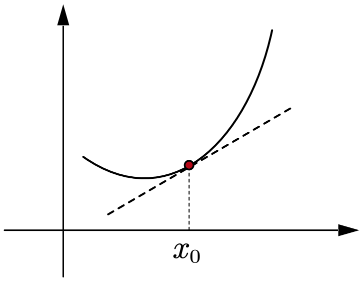
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\cos x-1}=2$中，在$x\to 0$时，分母$\cos x-1<0$，两者极限为正数，说明$f(x)-1<0$，由此判断，当$x\to 0(x\neq 0)$时有$f(x)<f(0)$，所以$f(0)$处的函数值为极大值。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{e^x-1}=3$中，在$x\to 0$时，分情况讨论：

$x\to 0^+$时$e^x-1>0$，此时$g(x)+2>0$，则$g(x)>g(0)$；
$x\to 0^-$时$e^x-1<0$，此时$g(x)+2<0$，则$g(x)<g(0)$。
所以$g(0)$并非极值点。

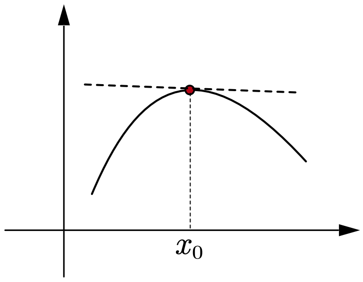
凹凸性与拐点

函数凹凸性定义 1（切线）：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，若对$x, x_0\in(a,b)$且$x\neq x_0$，恒有
①$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上是凸的；
②$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上是凹的。



凹函数

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)$



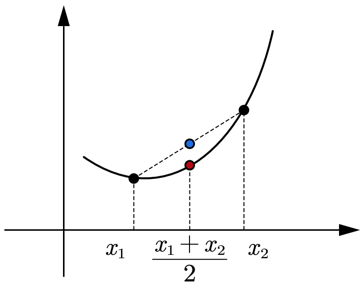
凸函数

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>f(x)$

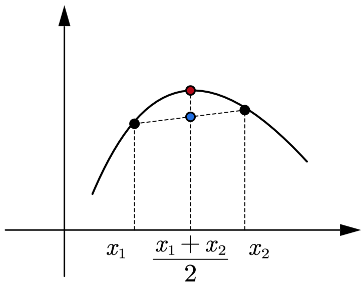
函数凹凸性定义 2（割线）：设$f(x)$在$[a,b]$连续，若对任意两点$x_1,x_2\in[a,b]$以及任意$t\in(0,1)$，恒有：

①$f(tx_1+(1-t)x_2)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，则称$f(x)$在$[a,b]$为凸函数；

②$f(tx_1+(1-t)x_2)\leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，则称$f(x)$在$[a,b]$为凹函数。



凹函数：$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



凸函数：$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

凹凸性的判别方法：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，在(a,b)内的任意子区间上$f''(x)\neq 0$，那么

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)\geq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)\leq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的。

如果曲线$y=f(x)$在经过点$(x_0,f(x_0))$时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点$(x_0,f(x_0))$为这曲线的拐点。拐点可能出现在 $f''(x)=0$和 $f''(x)$不存在的位置。

【例题 4.1.4 基础题】函数$y=\ln(x^2+1)$，求其凹凸区间以及拐点。

解：$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

令$y''=0$，对应位置为$x=1$、$x=-1$

当$x<-1$时，$y''<0$，对应凸函数；

当$-1<x<1$时，$y''>0$，对应凹函数；

当$x>1$时，$y''<0$，对应凸函数；

且$f(-1)=f(1)=\ln 2$

于是得出：凹区间为$[-1,1]$，凸区间为$(-\infty,-1]$与$[1,+\infty)$，拐点为$(-1,\ln 2)$与$(1,\ln 2)$.

【例题 4.1.5 基础题】求函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$的拐点

答案：$x=0$处为拐点（左凹右凸）

【例题 4.1.6 基础题】函数$f(x)$在$(-1,1)$内可导，且$f'(x)$严格单调递增，$f(0)=f'(0)=1$，则下列说法正确的是：

A. 在$x\in(-1,0)$和$x\in(0,1)$时，$f(x)<x+1$

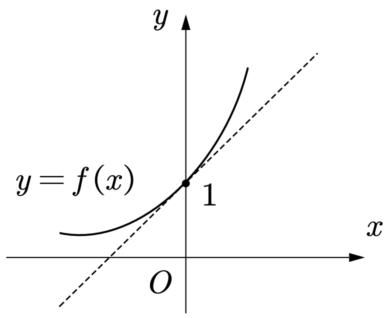
B. 在$x\in(-1,0)$和$x\in(0,1)$时，$f(x)>x+1$

C. 在$x\in(-1,0)$时，$f(x)<x+1$；在$x\in(0,1)$时，$f(x)>x+1$

D. 在$x\in(-1,0)$时，$f(x)>x+1$；在$x\in(0,1)$时，$f(x)<x+1$

答案：B

方法：



$f'(x)$严格单调递增，说明$f(x)$在定义域内为凹函数，曲线应在切线上方。

【例题 4.1.7 中等题】（2023 数学二 5 分）设函数$f(x)=(x^2+a)e^x$，若$f(x)$没有极值点，但曲线$y=f(x)$有拐点，则a的取值范围是

A. $[0,1)$.

B. $[1,+\infty)$.

C. $[1,2)$.

D. $[2,+\infty)$.

答案：C

解析：$f(x)=(x^2+a)e^x$，可得$f'(x)=(x^2+2x+a)e^x$，$f''(x)=(x^2+4x+a+2)e^x$

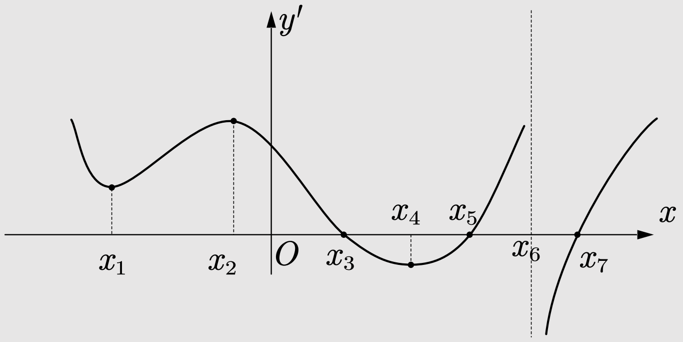
$f'(x)$不应变号，而$f''(x)$应变号。

所以可得：

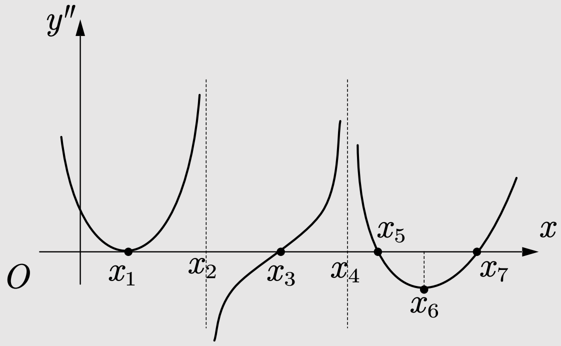
$$\begin{cases}4-4a\le 0\\16-4(a+2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 1\\a<2\end{cases}$$

【例题 4.1.8 基础题】设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续：

（1）假设其一阶导函数图像如下图所示，请判断函数$f(x)$在$x_1\sim x_7$这 7 个位置出现的极值点、拐点；



（2）假设其二阶导函数图像如下图所示，请判断函数$f(x)$在$x_1 \sim x_7$这 7 个位置出现的拐点。



（1）极值点：$x = x_3, x = x_5, x = x_6, x = x_7$
拐点：$\big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big), \big(x_4, f(x_4)\big)$
（2）拐点：$\big(x_2, f(x_2)\big), \big(x_3, f(x_3)\big), \big(x_5, f(x_5)\big), \big(x_7, f(x_7)\big)$

【例题 4.1.9 基础题】设$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + c$，已知曲线$y = f(x)$具有水平渐近线$y = 1$，且具有拐点$(-1,0)$.
（1）求a, b, c的值；
（2）求$f(x)$的单调性与极值。

答案：解：
（1）由于具有水平渐近线，意味着$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$，两者均可得出$c = 1$。
由于具有拐点$(-1,0)$，意味着两条信息：一方面是$f(-1) = 0$，另一方面是二阶导数在$x = -1$左右正负不同。$f(-1) = 0$可得：

$$\frac{a}{-2} + \frac{b}{4} + 1 = 0$$

求二阶导：

$$f''(x) = \frac{2a}{(x-1)^3} + \frac{6b}{(x-1)^4}$$

令$f''(-1) = 0$，得：

$$-\frac{a}{4} + \frac{3b}{8} = 0$$

联立两条方程，解得$a = 3, b = 2$。综上所述，$a = 3, b = 2, c = 1$。
（2）求得函数的一阶导数：

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{-4}{(x-1)^3}=\frac{-3x-1}{(x-1)^3}$$

首先求驻点，使$f'(x)=0$，可得$x=-\frac{1}{3}$，另外需要考虑到$f'(x)$在$x=1$处没有定义，也是一个需要研究的节点。而$(-\infty,-\frac{1}{3})$和$(1,+\infty)$内，$f'(x)<0$，单调递减，$(-\frac{1}{3},1)$内，$f'(x)>0$，单调递增，极小$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{8}$，无极大值。

4.2 高阶导数的使用

判断极值点的特殊情景：假设函数$f(x)$存在n阶导数，且在$x=a$处满足$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0\ (n>1)$：
①如果n为奇数，则$f(x)$在$x=a$处为拐点，非极值点；
②如果n为偶数，则$f(x)$在$x=a$处为极值点，非拐点，且$f^{(n)}(a)>0$则为极小值点，$f^{(n)}(a)<0$则为极大值点。

如果一个函数$f(x)$满足$f(a)=0$：其导数$f'(a)>0$，则说明函数$f(x)$在$x=a$处左负右正；其导数$f'(a)<0$，则说明函数$f(x)$在$x=a$处左正右负。

$f^{(n)}(a)>0 \Rightarrow f^{(n-1)}(a)$左负右正 $\Rightarrow f^{(n-2)}(a)$取极小值 0 $\Rightarrow f^{(n-3)}(a)$左负右正 $\Rightarrow\cdots$

$f^{(n)}(a)<0 \Rightarrow f^{(n-1)}(a)$左正右负 $\Rightarrow f^{(n-2)}(a)$取极大值 0 $\Rightarrow f^{(n-3)}(a)$左正右负 $\Rightarrow\cdots$

【例题 4.2.1 基础题】求出并说明下列函数在$x=0$处是否为极值点，以及是否为拐点。

（1）$y=\frac{x^5}{5}+x^6$

（2）$y=-2x^4+x^5$

答：（1）该函数在$x=0$处前 4 阶导数为 0，第 5 阶导数大于零，所以不是极值点，但是属于拐点；
（2）该函数在$x=0$处前 3 阶导数为 0，第 4 阶导数小于零，所以是极值点，不是拐点。

4.3 曲率与曲率半径（仅数学一、数学二）

曲率公式：
（1）设曲线C的参数方程为$x=x(t),y=y(t)(t\in[\alpha,\beta])$，则曲率

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}$$

其中$x(t),y(t)$在$[\alpha,\beta]$有二阶导数.
（2）设曲线C的直角坐标方程为$y=y(x),y(x)$二阶可导，则

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

曲率半径$\rho=\frac{1}{K}$.

【例题 4.3.1 基础题】（2012 数学二 4 分）曲线$y=x^2+x(x<0)$上曲率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是_____.

答案：$(-1,0)$

解析：

$$\frac{dy}{dx}=2x+1,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2。$$

$K=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$y'=\pm1$，对应$x=0$（无效）或$x=-1$。

【例题 4.3.2 基础题】（2014 数学二 4 分）曲线$\begin{cases}y=t^2+4t+1\\x=t^2+7\end{cases}$上对应$t=1$处的曲率半径为_______。

答案：$10\sqrt{10}$

解析：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(1+\frac{2}{t}\right)}{dx}=\frac{d\left(1+\frac{2}{t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\left(\frac{1}{2t}\right)=-\frac{1}{t^3}$$

在$t=1$时，$y'=3,y''=-1$，此时$\rho=\dfrac{10^{\frac{3}{2}}}{|-1|}=10\sqrt{10}$

【例题 4.3.3 基础题】（2016 数学二 4 分）设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$ ．若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$ ，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有

（A）$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$

（B）$f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$

（C）$f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$

（D）$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$

答案：A

【例题 4.3.4 基础题】（2018 数学二 4 分）曲线 $\begin{cases}x=\cos^3t,\\y=\sin^3t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_______。

答案：$\dfrac{2}{3}$

4.4 专项应用

物理应用（仅数学一、数学二）

对于一个质点的坐标x，其运动过程中x是关于时间t的函数，$x = x(t)$，而速度v和加速度a分别是x关于t的一阶导数和二阶导数：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

而在处理物理相关问题时，常常根据题目信息罗列等式，然后进行微分处理，微分运算法则如下：

（1）$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$

（2）$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

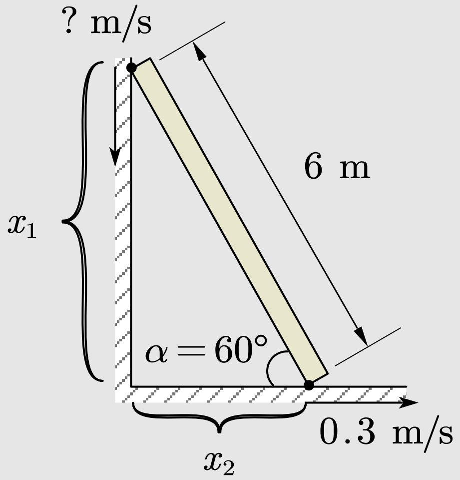
（3）$\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$

（4）$\mathrm{d}(Cu) = C\,\mathrm{d}u$

（5）$\mathrm{d}(C) = 0$

（6）$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}(v \neq 0)$

【例题 4.4.1 基础题】如图，一个长 6 米的梯子斜搭在墙上，初始时倾角为 60°，假设其底部向右以 0.3 m/s 的速度水平滑动，请分别求出其搭在墙上一端下落的速度，以及倾角α随时间的变化率。



解：假设梯子两端距墙角分别为x_1（竖直）、x_2（水平），两者之间的关系有：$x_1{}^2+x_2{}^2=36$.

倾角α与x_2之间的关系有：$\frac{x_2}{6}=\cos\alpha$.

利用关联方程，进行微分处理

$$x_1{}^2+x_2{}^2=36$$

左右两侧同时取微分号：

$$\mathrm{d}(x_1{}^2+x_2{}^2)=\mathrm{d}(36)$$
$$2x_1\mathrm{d}x_1+2x_2\mathrm{d}x_2=0$$

左右两侧同时除以$\mathrm{d}t$，可得：

$$x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_2}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times 0.3=-\frac{\sqrt{3}}{10}$$

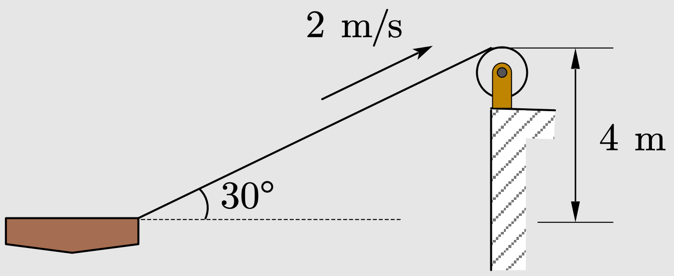
对于倾角，$\frac{x_2}{6}=\cos\alpha$，采用同样的方法：

$$\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{6}\right)=\mathrm{d}(\cos\alpha)$$

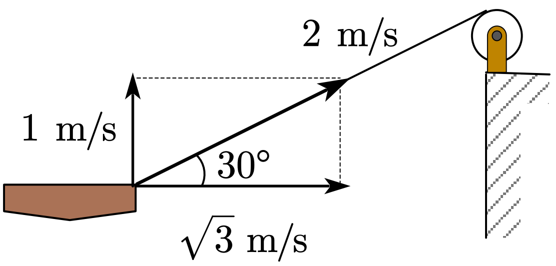
$$\frac{1}{6}\mathrm{d}x_2=-\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{6\sin\alpha}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}\times 0.3=-\frac{\sqrt{3}}{30}$$

【例题 4.4.2 基础题】如图所示，在河岸上用一根绳子拉一个船靠近，几何信息如图所示，绳子的速度是 2 m/s，请问在这个瞬间（绳子与水平面夹角为 30°），船移动的速度是多少？

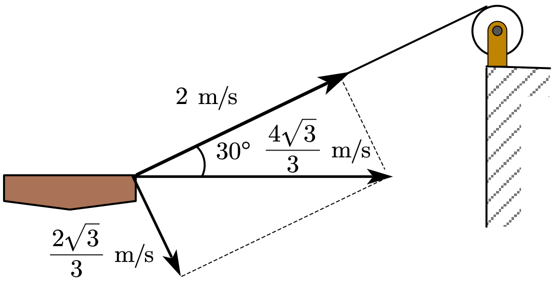


错误解法：



错误原因：我们的研究对象是船，并非绳子，船的实际运动应该是水平向右。如果拆解也应该是拆解水平运动。

正确解法一：



正确解法二：

设绳长为 l，船与岸水平距离为x，那么有相应的关系：$l^2-x^2=16$

建立微分关系式：

$$\mathrm{d}(l^2-x^2)=\mathrm{d}(16)$$

$$l\mathrm{d}l=x\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

【例题 4.4.3 基础题】（2021 年 数学二 5 分）有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为$2\mathrm{cm/s},-3\mathrm{cm/s}$. 当底面半径为 10cm，高为 5cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

A. $125\pi\mathrm{cm}^3/\mathrm{s},-40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.

B. $125\pi\mathrm{cm}^3/\mathrm{s},40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.

C. $-100\pi\mathrm{cm}^3/\mathrm{s},40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.

D. $-100\pi\mathrm{cm}^3/\mathrm{s},-40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.

答案：C

解析：圆柱体积与表面积公式分别为

$$V=\pi r^2h$$

$$S=2\pi rh+2\pi r^2$$

将V,S的表达式左右两侧取微分处理，可得：

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}(\pi r^2h)=\pi r^2\mathrm{d}h+2\pi rh\,\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi r^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+2\pi rh\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}(2\pi rh+2\pi r^2)=2\pi r\,\mathrm{d}h+2\pi(2r+h)\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+2\pi(2r+h)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

其中r,h均为随时间变化的函数，根据题目信息已知：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2,\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-3$$

并代入$r=10,h=5$,可得：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=100\times(-3)\pi+2\pi\times50\times2=-100\pi$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=20\pi\times(-3)+2\pi(20+5)\times2=40\pi$$

经济应用（仅数学三）

边际函数：设生产产品的数量为q，则有

（1）成本$C(q)$，收益$R(q)$，利润$L(q)$

三者之间的关系为：$L=R-C$。

（2）边际成本$C'(q)$，边际收益$R'(q)$，边际利润$L'(q)$

边际成本就是每多生产一件产品所需要的成本，边际收益就是每多生产一件产品所获得的收益。

弹性函数：对于$y=f(x)$在区间(a,b)内可导，则有弹性函数为：

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{f(x)}f'(x)$$

比如设产品价格为p，有需求函数$Q=f(p)$，则需求对价格的弹性函数为：

$$\eta(p)=\frac{p}{f(p)}f'(p)$$

一般情况下，$f'(p)$取负值（价格越高需求越低），弹性函数反应的是“需求变化比例随价格变化比例的波动情况”。比如价格增加 1%。需求降低 0.2%，则弹性函数为-0.2.

弹性函数的绝对值大于 1，则称之为“高弹性”；弹性函数的绝对值小于 1，则称之为“低弹性”。

【例题 4.4.4 基础题】（2013 数学三 10 分）设生产某商品的固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元 / 件，价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1000}$（p是单价，单位：元；Q是销量，单位：件）. 已知产销平衡，求：

（I）该商品的边际利润；

（II）当$p=50$时的边际利润，并解释其经济意义；

（III）使得利润最大的定价p.

答案：

（I）总收入$R(Q)=p(Q)\cdot Q=\left(60-\dfrac{Q}{1000}\right)Q$

总成本$C(Q)=60000+20Q$

总利润$L(Q)=R(Q)-C(Q)=40Q-\dfrac{Q^2}{1000}-60000$，总利润求导数，得：

边际利润$L'(Q)=-\dfrac{Q}{500}+40$（元）.

（II）$p=50$时，$Q=10000$，则边际利润$L'(10000)=-\dfrac{10000}{500}+40=20$

经济意义：当销售量为 10000 件时，再多销售 1 件（即第 10001 件）可带来 20 元的额外利润。

（III）利润最大时，边际利润为 0，则：

$$L'(Q) = -\frac{Q}{500} + 40 = 0,\quad Q = 20000,\ p = 40.$$

【例题 4.4.5 基础题】（2015 数学三 10 分）为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型。设Q为该商品的需求量，p为价格，MC为边际成本，η为需求弹性$(\eta > 0)$.

（I）证明定价模型为$p = \dfrac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$；

（II）若该商品的成本函数为$C(Q) = 1600 + Q^2$，需求函数为$Q = 40 - p$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格。

答案：

（I）η为需求弹性，则有：

$$\eta = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\frac{p}{Q}$$

因为$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} < 0$，故加了负号保证$\eta > 0$。

MC为边际成本，则有：$MC = C'(Q) = \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}$。

总利润为：$L = p(Q)\cdot Q - C(Q)$，边际利润为：

$$L'(Q) = p(Q) + p'(Q)\cdot Q - C'(Q)$$

为了使收益达到最大，应当使边际利润为 0，即：

$$p(Q) + p'(Q)\cdot Q - C'(Q) = 0$$

其中$C'(Q) = MC$，$p'(Q) = -\dfrac{p}{Q}\cdot\dfrac{1}{\eta}$由此可推得：

$$p = \frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$$

（II）$Q = 40 - p$，则有$\eta = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\dfrac{p}{Q} = \dfrac{p}{40-p}$，$MC = 2Q = 80 - 2p$，代入$p = \dfrac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$可得：

$$p = \frac{80-2p}{1-\frac{40-p}{p}}$$

解得：$p = 30$。

【例题 4.4.6 基础题】（2018 数学三 5 分）设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其

中 Q 为产量．若产量为 Q_0 时平均成本最小，则

（A）$C'(Q_0)=0$．

（B）$C'(Q_0)=C(Q_0)$．

（C）$C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$．

（D）$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$．

答案：D

解析：平均成本为 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$，使其达到最小值，则导数为 0，即：

$$\overline{C}'(Q_0)=\frac{Q_0\cdot C'(Q_0)-C(Q_0)}{{Q_0}^2}=0$$

所以有：

$$Q_0\cdot C'(Q_0)-C(Q_0)=0$$

【例题 4.4.7 基础题】（2020 数学三 5 分）设某厂家生产某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，该产品的单价为 p，需求量 $Q(p)=\dfrac{800}{p+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为________.

答案：8

解析：总利润为：$L=p\cdot Q-C=\left(\dfrac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q)$，使其导数为 0，则得到：

$$\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)-Q\frac{800}{(Q+2)^2}-13=0$$

解该方程可得：$Q=8$

【例题 4.4.8 基础题】（2024 数学三 5 分）某产品的价格函数为

$p=\begin{cases}25-0.25Q, & Q\le 20\\ 35-0.75Q, & Q>20\end{cases}$（$p$ 为单价，单位：万元；Q 为产量，单位：件），

总成本函数为 $C=150+5Q+0.25Q^2$（万元），则经营该产品可获得的最大利润为______（万元）.

答案：50

解析：利润函数为：

$$L=pQ-C=\begin{cases}(25-0.25Q)Q-(150+5Q+0.25Q^2), & Q\le 20\\(35-0.75Q)Q-(150+5Q+0.25Q^2), & Q>20\end{cases}$$

化简可得：

$$L=pQ-C=\begin{cases}-0.5Q^2+20Q-150, & Q\le 20\\-Q^2+30Q-150, & Q>20\end{cases}$$

可知当$Q=20$时，L取得最大值为 50.

第5讲 泰勒公式

5.1 基本原理与常见展开

泰勒公式：设$f(x)$在点$x=x_0$处具有n阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)$为余项，有两种类型：皮亚诺余项和拉格朗日余项：

①皮亚诺余项：$x\to x_0$，这时$(x-x_0)$是无穷小的：

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$$

皮亚诺余项常用于解决$x\to x_0$极限过程中的问题。

②拉格朗日余项：$f(x)$在区间(a,b)内有$n+1$阶导数，$x_0\in(a,b)$，$x\in[a,b]$，则有：

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

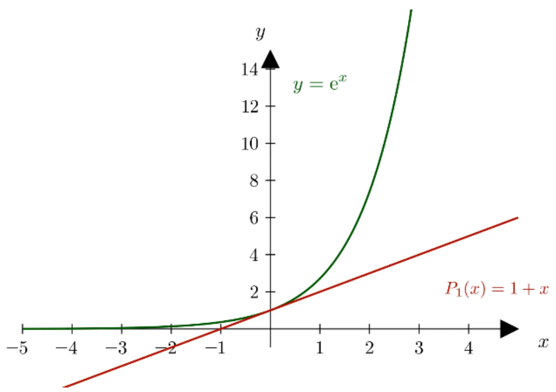
其中ξ介于x与x_0之间。拉格朗日余项常用于解决区间中的函数性质，用于处理各类结论证明题。

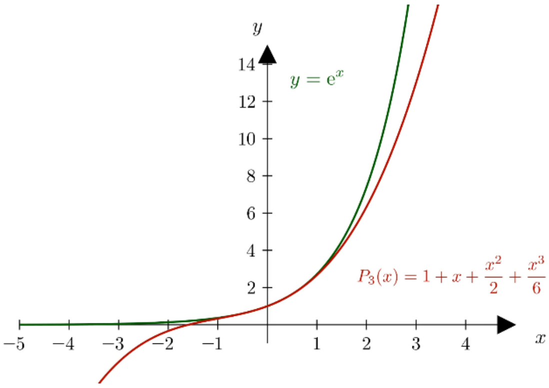
麦克劳林公式：令泰勒公式中的x_0取 0，则此时的泰勒公式也被称为麦克劳林公式：

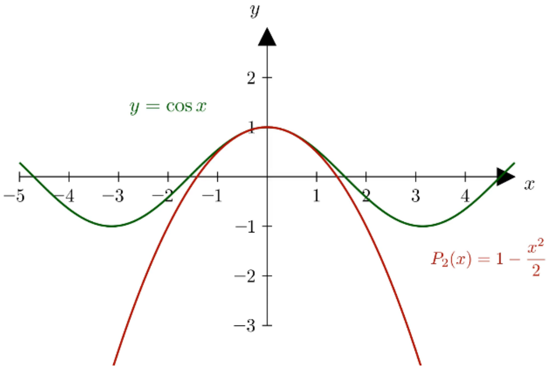
$$\text{皮亚诺余项：}f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

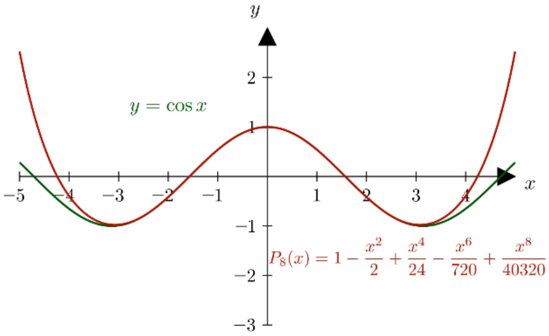
$$\text{拉格朗日余项：}f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

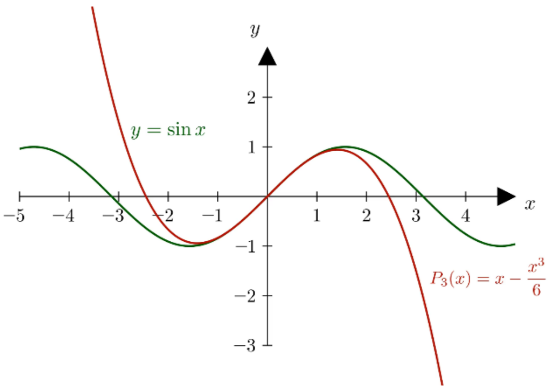
泰勒公式的核心思想：利用函数多项式近似其他函数。比如$y=\mathrm{e}^x$与它对应的麦克劳林展开式图像：

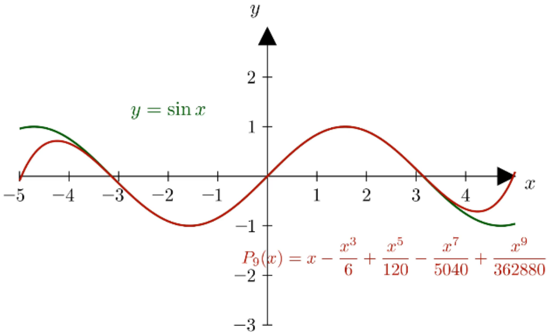



$y = \mathrm{e}^x$
$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$


$y = \cos x$
$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$


$y = \cos x$
$P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}$


$y = \sin x$
$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$


$y = \sin x$
$P_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$

常用的麦克劳林展开式（皮亚诺余项）：

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+o(x^6)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+o(x^7)$$

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+o(x^2)$$

麦克劳林公式速记方法：

(1) 关于$f(x)=e^x$的展开：该函数在$x=0$的各阶导数均为 1；

(2) 关于$f(x)=\cos x$的展开：该函数在$x=0$的各阶导数为 0，-1，0，1，0，-1，0，…；

(3) 关于$f(x)=\sin x$的展开：该函数在$x=0$的各阶导数为 1，0，-1，0，1，0，-1，0，…；

(4) 关于$f(x)=(1+x)^n$的展开：二项式定理；

(5) 关于$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的展开：该函数在$x=0$的n阶导数为$n!$，或者根据等比数列求和公式；

(6) 关于$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$的展开：将$\dfrac{1}{1-x}$的展开中的x替换为$(-x)$；

(7) 关于$f(x)=\ln(1+x)$的展开：$\ln(1+x)$的导数为$\dfrac{1}{1+x}$，按照后者的展开，求原函数即可。

【例题 5.1.1 基础题】求以下函数的 3 阶麦克劳林展开式（皮亚诺余项）

(1) $y=\sin(3x)$

(2) $y=e^{\tan x}$

(3) $y=\dfrac{1}{2+x}$

答案：（1）$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，将其中的$x$替换为$3x$可得：

$$\sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

（2）$e^x=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，将其中的x替换为tan x：

$$\mathrm{e}^{\tan x}=1+\frac{1}{1!}\tan x+\frac{1}{2!}(\tan x)^2+\frac{1}{3!}(\tan x)^3+o(x^3)$$

再将$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$代入，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x}&=1+\frac{1}{1!}\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2!}\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\\&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

（3）$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3)$，可得：

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right]\\&=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)\end{aligned}$$

【例题 5.1.2 基础题】设$f(x)=\sqrt{1+x}\cos x$

（1）求$f(x)$带皮亚诺余项的三阶麦克劳林公式。
（2）求$f'''(0)$。

（1）$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$，　$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$，

从而

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}\cos x&=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

（2）根据麦克劳林公式展开的原理，可知

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{f'''(0)}{3!}=-\frac{3}{16},\ f'''(0)=-\frac{9}{8}$$

【例题 5.1.3 中等题】求以下函数的带拉格朗日余项的三阶麦克劳林公式。

（1）$y=\mathrm{e}^x$

（2）$y=\dfrac{1}{1-x}(-1<x<1)$

（3）$y=\sin x$

答案：（1）$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$，所以可知：

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{e^\xi}{4!}x^4,\ \xi\in(0,x)\ \ or\ \ (x,0)$$

（2）$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$，所以可知：

$$x=1+x+x^2+x^3+\frac{1}{(1-\xi)^5}x^4,\ \xi\in(0,x)\ \ or\ \ (x,0)$$

（3）$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$，所以可知：

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{\sin(\xi)}{4!}x^4,\ \xi\in(0,x)\ \ or\ \ (x,0)$$

【例题 5.1.4 中等题】（2012 年 数学一/数学二/数学三 10 分）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

证明：泰勒公式：设$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$，则将f(x)麦克劳林展开可得：

$$\begin{aligned}x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x&=x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\cos x-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\\&=x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\cos x-(1+x^2)\\&=x\left[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)\right]+\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\\&=2x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\\&=x^2+\frac{17}{24}x^4+\cdots\end{aligned}$$

展开后均为系数为正数的偶数次项，可得$f(x)\geq 0$，原式得证。

注意：拉格朗日型余项常用于解决涉及高阶导数的证明题，我们将在后续证明题专项环节进行讲解。

5.2 泰勒公式应用

求函数极限

【例题 5.2.1 基础题】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

（1）方法一：洛必达

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\cos x}=1$$

方法二：泰勒公式代换

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)-1-(x+o(x^2))}{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2!}x^2}{\frac{1}{2!}x^2}$$
$$=1$$

（2）错误方法（直接等价无穷小）：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x-x^2\frac{1}{x}=0$

方法一（洛必达）：令$\frac{1}{x}=t$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-t^2\ln(1+t)}{t^2}$$

方法二（泰勒）：

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}$$

【例题 5.2.2 中等题】设a,b是常数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-ax-b\right]=0$，求$a+b=$_______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：将函数进行泰勒展开：

$$x\to+\infty,\ \sqrt{x^2+x}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=x\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\cdots\right)=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\cdots$$

由此得出：$a=1$，$b=\frac{1}{2}$。所以$a+b=\frac{3}{2}$.

【例题 5.2.3 基础题】设$f(x)$在$x=0$处二阶可导，且$f(0)=0,f'(0)=2,f''(0)=4$，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{x^2}$

方法一：洛必达

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-2}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{f''(0)}{2}=2$$

方法二：泰勒公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=2x+2x^2+o(x^2)$$

于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x+2x^2+o(x^2)-2x}{x^2}=2$$

判断无穷小的阶数

【例题 5.2.4 基础题】

1. 在$x\to0$时，请判断$(e^x-\cos x+\sin x-2x-x^2)$是关于$x$的几阶无穷小？
2. 当a、b取何值，$x\to0$时，$x-(a+b\cos x)\sin x$为x的 5 阶无穷小？

1. 方法一：洛必达

假设$x\to0$时，$(e^x-\cos x+\sin x-2x-x^2)$为$x$的$k$阶无穷小，那么则有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x+\sin x-2x-x^2}{x^k}=a,a\neq0$$

进而：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x-2x-x^2}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x-2-2x}{kx^{k-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x-\sin x-2}{k(k-1)x^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x}{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)x^{k-5}}$$

由此可知$k-5=0$，于是$k=5$.

方法二：泰勒公式代换

$e^x-\cos x+\sin x-2x-x^2$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right)$$
$$+\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)-2x-x^2$$

$$=\frac{x^5}{60}$$

由此可以给出该式为 5 阶无穷小，且与$\frac{x^5}{60}$为等价无穷小。

2. $x\to 0$时，

$x-(a+b\cos x)\sin x$

$$=x-a\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\right)$$
$$-b\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\right)$$
$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5$$

于是有：

$$\begin{cases}(1-a-b)=0\\ \left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)=0\end{cases}$$

解得：$a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3}$.

【例题 5.2.5 基础题】（2023 数学一 5 分）当$x\to 0$时，$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$__________.

答案：-2

求高阶导数

【例题 5.2.6 基础题】设$f(x)=x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$，求$f''(0)$。

答案：

$f(x)$本身括号拆开后即为多项式函数，其x^2的系数为$1^2 2^2 3^2=36$，根据泰勒公式原理，可知：

$$f''(0)=2\times 36=72$$

【例题 5.2.7 中等题】设$f(x)=x^4\arctan x$，请判断$x=0$处该函数存在拐点还是极值点？

在$x \to 0$时，有$f(x) = x^4 \arctan x = x^4 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) = x^5 - \frac{x^7}{3} + \frac{x^9}{5} + o(x^9)$

由此可得，$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$，$f^{(5)}(0) = 120 > 0$，故$x = 0$处不存在极值点，$(0,0)$是拐点。

第6讲 不定积分（原函数）

6.1 牛顿-莱布尼茨公式

若$F'(x)=f(x)$或$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$在区间$I$上成立，则称$F(x)$为$f(x)$在区间$I$中的一个原函数．$f(x)$在区间$I$上的全体原函数称为$f(x)$在区间$I$上的不定积分，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$。其中$\int$为积分号，$x$为积分变量，$f(x)$为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$为被积表达式。

若$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中$C$为任意常数，称为积分常数．

不定积分基本运算法则：

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$$

6.2 不定积分的基本求解方法

首先把握常见函数的原函数：

$\int 0\mathrm{d}x=C$	$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
$\int k\mathrm{d}x=kx+C$	$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
$\int x^a\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C(a\neq-1)$	$\int \sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C$
$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$	$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

基本积分公式的拓展（可后续强化记忆）

- $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$
- $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$
- $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$
- $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

【例题 6.2.1 基础题】计算：（1）$\int \mathrm{e}^x\left(3-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　（2）$\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

1）$\int \mathrm{e}^x\left(3-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3\mathrm{e}^x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=3\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^x-2\sqrt{x}+C$

2）$\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x+1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sin x+x)+C$

最基本的方法：凑常数法，把$(ax+b)$当作整体

【例题 6.2.2 基础题】计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{3x-1}\mathrm{d}x$

(2) $\int \sqrt{4x+3}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sin(4x)\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{25+x^2}\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\mathrm{d}x$

(1) $\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$

(2) $\dfrac{\frac{2}{3}(4x+3)^{\frac{3}{2}}}{4}+C=\frac{1}{6}(4x+3)^{\frac{3}{2}}+C$

(3) $-\frac{\cos(4x)}{4}+C$

(4) $\arctan(x+2)+C$

(5) $\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+C$

(6) $\arcsin\frac{x}{4}+C$

6.3 凑微分法：找到一部分作为另一部分的导数

掌握最基本的微分运算规律：$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$

例如：

$$\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(x^2+2)=2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(t^2)=2t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}(y^2)=2y\mathrm{d}y=2y\cdot y'\mathrm{d}x$$

【例题 6.3.1 基础题】请按下面的例子写出微分形式转换：

例题：$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

(1) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(2) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(3) $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(4) $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(5) $\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(6) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(7) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(8) $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

(9) $(2x+x^2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\_\_\_\_\_\_)$

有了这样的想法，我们首先来计算一个简单的积分：

$$\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{d}(\cos x)$$
$$\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$$

我们把$\cos x$当作整体，可得不定积分的结果为“$-\ln|\cos x|+C$”。

【例题 6.3.2 基础题】计算以下不定积分

(1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int\frac{5+\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+6}\,\mathrm{d}x$

(1) 原式 $=\int\frac{1}{2}(2x)\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^t}{2}+C=\frac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{2}+C$

(2) 原式 $=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\arctan t+C=\arctan(\mathrm{e}^x)+$
C

(3) 原式 $=\displaystyle\int(5+\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=5\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

(4) 原式 $=\displaystyle\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+6}\,\mathrm{d}(x^2+6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+6)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(x^2+6)^{\frac{3}{2}}+C$

6.4 特定类型一：有理分式积分

关于有理分式的化简处理手段，主要是分子分母为多项式函数的分式，例如：

$\dfrac{2x^3+3x^2+5x+6}{x^3+4x+1}$，$\dfrac{2}{x^2+4x+5}$，$\dfrac{x+1}{2x^2+5x-6}$，$\dfrac{3x+1}{6x+7}$

多项式函数：设以下形式的函数为n次多项式函数，并简记为$P_n(x)$：

$$P_n(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots a_nx^n\ \ (n\in N)$$

有理分式：对于形式如"$\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$"的函数我们称之为"有理分式"，$P_n(x)$与$P_m(x)$分别是x的n次和m次多项式（$m\geq 1$）。此外，如果$n\geq m$，则称该分式为"假分式"；反之，如果$n<m$，则称该分式为"真分式"。

假分式转化为真分式

【例题 6.4.1 基础题】将下列"假分式"化简为"多项式+真分式"的形式：

（1）$\dfrac{2x+5}{x+1}$

（2）$\dfrac{x^3+x^2+5x+2}{x^2+2}$

（3）$\dfrac{x^4+2x^3+x^2+3x+3}{x^3+1}$

（1）$2+\dfrac{3}{x+1}$

（2）$x+1+\dfrac{3x}{x^2+2}$

（3）$x+2+\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

真分式的分母拆解

有理分式的分母可能被因式分解为这些内容：x、x^n、$(x+a)$、$(x+a)^n$、(x^2+bx+c)、$(x^2+bx+c)^n$。

而根据分母的分解情况，整个分式可以利用"反通分"来进一步拆解。

【例题 6.4.2 基础题】请将下列分式拆解为若干个最简分式：

(1) $\dfrac{3x^2-11x-24}{x^3-x^2-6x}$

(2) $\dfrac{3x^2+2x+9}{x^3+x^2+4x+4}$

(3) $\dfrac{3x^2+5x+5}{x^3+3x^2+4x-8}$

(4) $\dfrac{4x^3+x-1}{x^2+x^4}$

(5) $\dfrac{1}{x^3+1}$

(6) $\dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$

(7) $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

(8) $\dfrac{2x^2+5x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$

(1) 原式 $=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{4}{x}$

(2) 原式 $=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+4}$

(3) 原式 $=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x+3}{x^2+4x+8}$

(4) 原式 $=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3x+1}{1+x^2}$

(5) 原式 $=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

(6) 原式 $=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(7) $\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}$

(8) 原式 $=\dfrac{2}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}$

计算最简有理分式的原函数

【例题 6.4.3 基础题】求下列有关最简分式的不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{5}{2x-3}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(5x+6)^3}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{3x^2+6}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

答案：

(1) $\dfrac{5}{2}\ln|2x-3|+C$

(2) $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(5x+6)^2}+C$

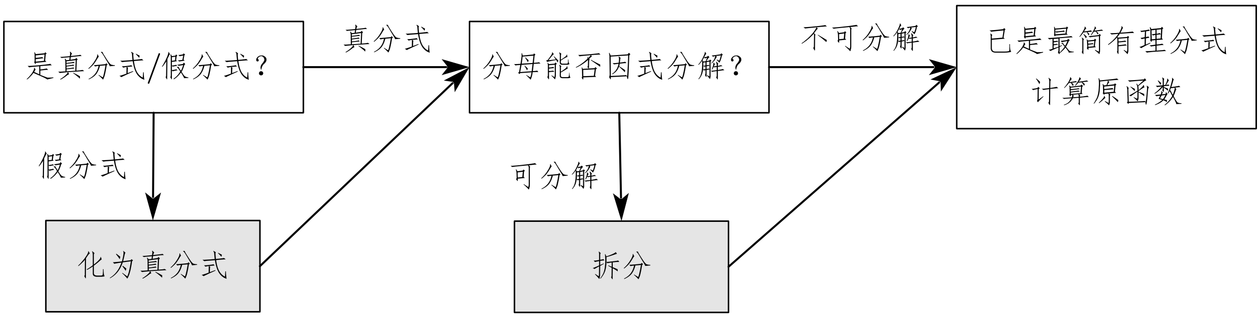
(3) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$

(4) $\dfrac{x+5}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+10}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{5}{x^2+1}$，原式

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+5\arctan x+C$

(5) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-\arctan(x+2)+C$

有理分式的计算流程图如下：



而一些特殊的有理分式积分，采用一些特定方法可能更快捷。

比如：如果分母的次数远高于分子的次数，则可以考虑“倒代换”来解决：

$$\int \frac{1}{x(1+x^5)}\mathrm{d}x \xRightarrow{令t=\frac{1}{x}} \int \frac{-t^4}{1+t^5}\mathrm{d}t = -\frac{\ln|1+t^5|}{5}+C$$

比如：分子和分母之间可能存在某种导数关系：

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+C$$

【例题 6.4.4 基础题】（2019 数学二 10 分）求不定积分 $\displaystyle\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

答案：

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{3}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

所以

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x = \frac{-3}{x-1}-2\ln|x-1|+\ln(x^2+x+1)+C$$

6.5 特定类型二：三角有理式

三角函数有理式：以 $\sin x$ 与 $\cos x$ 为变量的有理函数，通常记为 $R(\sin x,\cos x)$ 的形式（$\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 都可以由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 表示）。

对于这类积分，可以作代换 $\tan\frac{x}{2}=t$（称为万能代换）使被积函数有理化，这样代换后，就有

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

这样，就把三角有理式的积分化成为 t 的有理函数的积分。

【例题 6.5.1 基础题】求解：$\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

答案：作变换 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，那么 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，而 $x=2\arctan u$，从而 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$. 代入原式，可得：

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\left(u+2+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

三角积分函数中的凑微分法技巧，若被积函数表达式$R(\sin x,\cos x)$存在下列条件：

（1）$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，采用凑微分法：$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$；

（2）$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，采用凑微分法：$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$；

（3）$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，采用凑微分法：$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$；

【例题 6.5.2 基础题】求解下列不定积分

（1）$\int\sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

（2）$\int\frac{1}{2\sin x\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$

（4）$\int\sec x\,\mathrm{d}x$

（5）$\int\frac{1}{\cos^2 x+4\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(1) $-\int\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}\cos x=-\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,d\cos x=\int(t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

(2)

$$\int\frac{1}{2\sin x\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{2\sin^2 x\cos x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{2(1-\cos^2 x)\cos x+2(1-\cos^2 x)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-t)(1+t)^2}dt=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(1-t)}+\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}dt$$

$$=-\frac{1}{8}\left[-\ln(1-t)-\frac{2}{1+t}+\ln(1+t)\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}-\ln(1+\cos x)\right]+C$$

(3)

$$\int \frac{1}{1+2\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+2\tan x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sec^2 x+2\tan x}\mathrm{d}\tan x$$
$$=\int \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+t}+C=-\frac{1}{1+\tan x}+C$$

(4)

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$
$$=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

(5) $$\int \frac{\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+4\tan^2 x}\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)+C$$

6.6 有关根号的常见处理：第二类换元法

情形 1：根号内为 x 的一次表达式

【例题 6.6.1 基础题】

求不定积分：

（1）$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$

（4）$\int \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$

（1）令 $\sqrt{2x+1}=t, x=\frac{t^2-1}{2}, \mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，

$$\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=\int \frac{1+t-1}{1+t}\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{2x+1}-\ln\left|1+\sqrt{2x+1}\right|+C$$

（2）$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=\int \frac{\mathrm{d}t^6}{t^3(1+t^2)}=\int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3(1+t^2)}=6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.$$

（3）$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$，令$t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, x=\ln(t^2-1), \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，于是原式

$$=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t=\ln(t-1)-\ln(t+1)+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}\right|+C$$

（4）进行换元处理，$\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}=t$，$x=\frac{3}{2-t^2}-1$，$\mathrm{d}x=\frac{6t}{(t^2-2)^2}\mathrm{d}t$

代入原式，可得：$\int \frac{6t^2}{(t^2-2)^2}\mathrm{d}t$，而其中：

$$\frac{6t^2}{(t^2-2)^2}=\frac{\frac{3}{2}}{(t-\sqrt{2})^2}+\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{t-\sqrt{2}}+\frac{\frac{3}{2}}{(t+\sqrt{2})^2}+\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}{t+\sqrt{2}}$$

所以

$$\int \frac{6t^2}{(t^2-2)^2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\frac{1}{t-\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln|t-\sqrt{2}|-\frac{3}{2}\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln|t+\sqrt{2}|+C$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}+\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)+\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}\right)+\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}-\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}\right|+C$$

情形 2：根号内为 x 的二次多项式

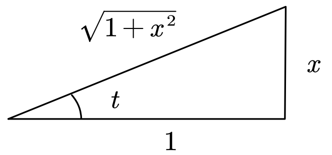
【例题 6.6.2 基础题】

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

（2）$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

（1）



令$x=\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<0, 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t, \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$

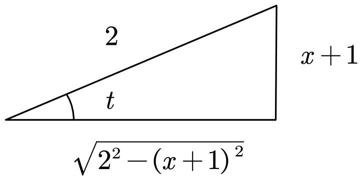
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\tan^2 t\cdot\sec t}=\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+C$$

由于$\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以原式$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

（2）

$$\int\sqrt{3-2x-x^2}\mathrm{d}x=\int\sqrt{3-(x^2+2x)}\mathrm{d}x=\int\sqrt{3-(x^2+2x+1-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\sqrt{2^2-(x+1)^2}\mathrm{d}x$$



令$\frac{x+1}{2}=\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{2^2-(x+1)^2}=2\cos t$，$\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$

$$\int\sqrt{2^2-(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=4\int\cos^2 t\mathrm{d}t$$

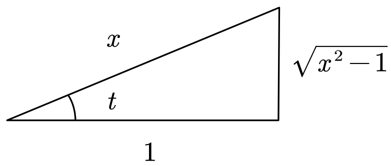
$$=2\int(\cos 2t+1)\mathrm{d}t=\sin 2t+2t+C=2\sin t\cdot\cos t+2t+C$$

由于$\sin t=\frac{x+1}{2}$，$\cos t=\frac{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}{2}$，$t=\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$，所以：

$$\text{原式}=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{2^2-(x+1)^2}+2\cdot\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+2\cdot\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

（3）



错误做法：

令$\frac{1}{x}=\cos t$，$x=\sec t$，$\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，于是原式变换：

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec t\tan t}{\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

进而，原式$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

错误原因： 观察原式，对于x的定义域是分为两部分的：$x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$，而上述变换只考虑了$x>1$的条件，当$x<-1$时，$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\tan^2 t}=-\tan t$

正确做法： 令$x=\sec t$，由于$x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$，也就需要$\cos t\in(-1,0)\cup(0,1)$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

当$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时：$x=\sec t$，$\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

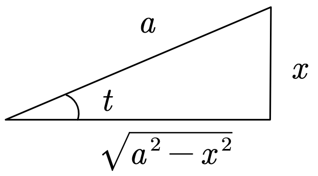
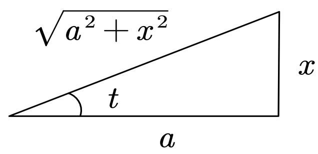
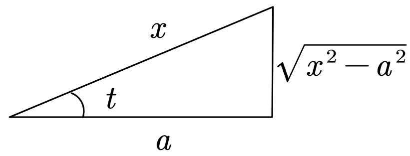
当$t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时：$x=\sec t$，$\sqrt{x^2-1}=-\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = -\int \sec t\,\mathrm{d}t = -\ln|\sec t+\tan t| + C = -\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C$$

$$\ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

要注意换元法的细节：t和x应当满足一一对应的关系，必要时需要分区间讨论。

$\sqrt{a^2-x^2}$ $-a<x<a$	$\sqrt{a^2+x^2}$ $-\infty<x<+\infty$	$\sqrt{x^2-a^2}$ $x<-a$ or $x>a$
$x=a\cdot\mathrm{sin}t$ $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\mathrm{cos}t$ $\mathrm{d}x=a\cdot\mathrm{cos}t\mathrm{d}t$	$x=a\cdot\mathrm{tan}t$ $\sqrt{a^2+x^2}=a\cdot\mathrm{sec}t$ $\mathrm{d}x=a\cdot\mathrm{sec}^2t\mathrm{d}t$	$x=a\cdot\mathrm{sec}t$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\cdot\lvert\mathrm{tan}t\rvert$ $\mathrm{d}x=a\cdot\mathrm{sec}t\cdot\mathrm{tan}t\mathrm{d}t$
		

6.7 分部积分：用于处理多种类型函数组合搭配

分部积分公式为：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

分部积分原理来自于微分计算法则：

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

左右两侧加积分号“$\int$”可得：

$$\int \mathrm{d}(uv) = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$

$$uv = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$

【例题 6.7.1 基础题】计算下列不定积分

（1）$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$

（2）$\int \ln x\,\mathrm{d}x$

（1）

$$\int \arctan x\mathrm{d}x = \arctan x\cdot x - \int x\mathrm{d}(\arctan x) = \arctan x\cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \arctan x\cdot x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2) = \arctan x\cdot x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

（2）$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

在处理两种不同类型函数相乘时一般用分部积分法。记住口诀：**反对幂指三（反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数）**。口诀中，越是靠后函数，越优先与“dx”结合，然后套用分部积分公式。

【例题 6.7.2 基础题】计算下列不定积分

（1）$\int x\sin x\mathrm{d}x$

（2）$\int (x^2+3x)\cos x\mathrm{d}x$

（3）$\int x^3\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

（4）$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$

（5）$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$

（1）$\int x\mathrm{d}(-\cos x) = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \sin x + C$

（2）

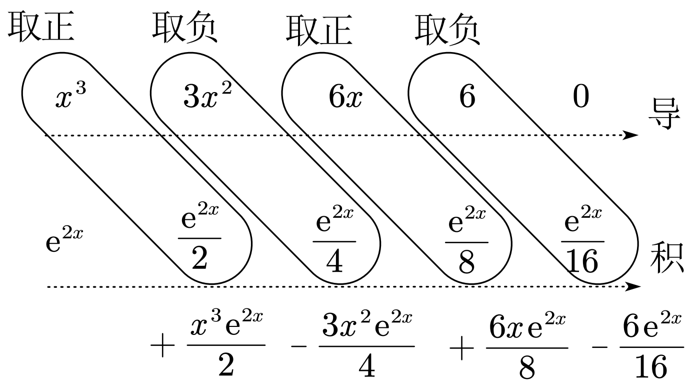
$$\int (x^2+3x)\mathrm{d}(\sin x) = (x^2+3x)\sin x - \int (2x+3)\sin x\mathrm{d}x$$

$$=(x^2+3x)\sin x + \int (2x+3)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=(x^2+3x)\sin x + (2x+3)(\cos x) - 2\int \cos x\mathrm{d}x$$

$$=(x^2+3x)\sin x + (2x+3)(\cos x) - 2\sin x + C$$

（3）运用表格积分法（在“幂×指”或者“幂×三”的时候使用）：
第一步：将被积函数中的幂函数写在上方，指数函数（或三角函数）写在下方；
第二步：逐步对幂函数求导数，直到导至 0 为止；而下一行计算原函数；
第三步：按图中所示进行两两相乘，并且将结果按照一正一负进行合并相加。



结果：

$$\int x^3e^{2x}dx=\frac{x^3e^{2x}}{2}-\frac{3x^2e^{2x}}{4}+\frac{6xe^{2x}}{8}-\frac{6e^{2x}}{16}+C$$

（4）$\int e^x\cos x dx=\int e^x d(\sin x)=e^x\cdot\sin x-\int \sin x d(e^x)$

$=e^x\sin x-\int\sin x e^x dx=e^x\sin x+\int e^x d(\cos x)$

$=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x dx$

所以：$\int e^x\cos x dx=\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}+C$

（5）

$\int\sec^3 x dx=\int\sec x d(\tan x)=\sec x\cdot\tan x-\int\tan x d(\sec x)$

$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec x\tan^2 x dx$

$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx$

$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec^3 x dx+\int\sec x dx$

$\int\sec^3 x dx=\dfrac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\dfrac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+C$

【例题 6.7.3 基础题】已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)dx=$______

答案：

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=x(\ln^2 x)'-\ln^2 x+C$$
$$=2\ln x-\ln^2 x+C.$$

故应填 $2\ln x-\ln^2 x+C$.

积分方法总结

方法	**题目特点**	**方法原理**
基本原函数公式	常见函数的原函数，不需要其他计算步骤，但需要格外熟练掌握。	略
$(ax+b)$ 的线性变化	$f(ax+b)$的形式。 例如：$\int\frac{1}{3x+2}dx$	将$(ax+b)$当作整体，直接求出原函数后再整体除以a
凑微分法	一部分是其它部分的导数。 例如：$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$、$\int\frac{\ln x}{x}dx$、$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$	$\int f(u)\cdot u'dx=\int f(u)du$
根号整体代换	表达式中含有$\sqrt{ax+b}$等类型的根式。 例如：$\int\frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx$、$\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$	令$t=\sqrt{***}$（题目中的根号）
三角代换	表达式中含有$\sqrt{ax^2+bx+c}$. 例如：$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$、$\int\sqrt{x^2+2x+2}dx$	利用勾股定理，画出相匹配的直角三角形，用

		三角函数来进行积分。
分部积分法	被积函数中同时出现了不同类型的函数。 例如：$\int x\sin x\,\mathrm{d}x$、$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$	$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ “反对幂三指”
特定类型	有理分式	假分式、分母的因式分解
	三角有理式	凑导数法则、万能代换

【例题 6.7.4 中等题】（2018 数学一/数学二 10 分）求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$。

答案：令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，$x=\ln(t^2+1)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$，代入原式可得：

$$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\int (t^2+1)^2\arctan t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\int(2t^3+2t)\arctan t\,\mathrm{d}t=\int\arctan t\,\mathrm{d}\left(\frac{t^4}{2}+t^2\right)$$

$$=\left(\frac{t^4}{2}+t^2\right)\arctan t-\int\frac{\frac{t^4}{2}+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{t^4}{2}+t^2\right)\arctan t-\frac{1}{2}\int\left(t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

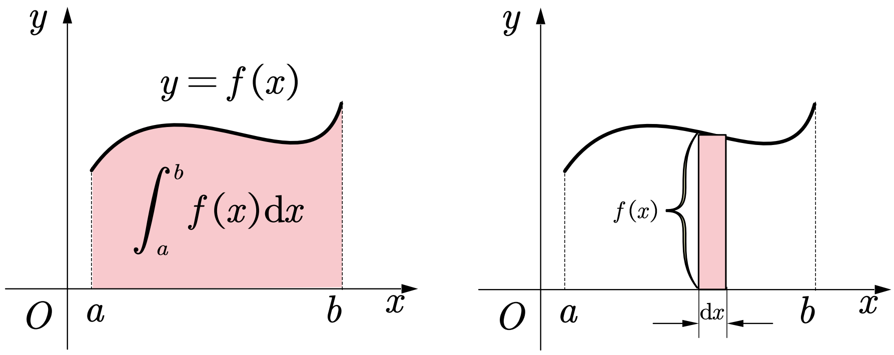
$$=\left(\frac{t^4}{2}+t^2\right)\arctan t-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t-\arctan t\right)+C$$

$$=\left[\frac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{2}+(\mathrm{e}^x-1)+\frac{1}{2}\right]\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{3}+1\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,(\mathrm{e}^x+2)+C$$

第7讲 定积分

7.1 定积分的含义以及基本性质



牛顿-莱布尼茨公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

关于定积分的一些重要性质：

(1) 与变量无关：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

(2) 原地积分则为 0：$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(3) 换上下限则取相反数：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(4) 上下限的拆分：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

【例题 7.1.1 基础题】已知$f(x) = x^2 - x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，请求出$f(x)$.

解：记$\int_0^2 f(x)dx = a$，$\int_0^1 f(x)dx = b$，则$f(x) = x^2 - ax + 2b$，

$$a = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 - ax + 2b)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 2bx\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2a + 4b$$

$$b = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - ax + 2b)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 2bx\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + 2b$$

得到线性方程组：

$$\begin{cases} 3a - 4b = \dfrac{8}{3} \\ a - 2b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

于是$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

【例题 7.1.2 基础题】设$f(x)$一阶可导，$f(x) > 0$，$f'(x) > 0$，则当$\Delta x > 0$时

（A）$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t > f(x)\Delta x > 0$

（B）$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t < f(x)\Delta x < 0$

（C）$f(x)\Delta x > \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t > 0$

（D）$f(x)\Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t < 0$

答案：A

7.2 定积分运算

定积分一般的运算遵循$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

需要留意的是，在运用第二类换元法时，需要换上下限。

【例题 7.2.1 基础题】计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

（3）$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

（4）$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$

（5）$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = (\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4})|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = (\sin x - \frac{\sin^3 x}{3})|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$

（3）令 $\sqrt{2x+1} = t, x = \frac{t^2-1}{2}, \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$，

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{t}{1+t}\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}x = (t-\ln(1+t))|_1^3 = 2-\ln 2$$

（4）$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}(\ln x) = \mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$

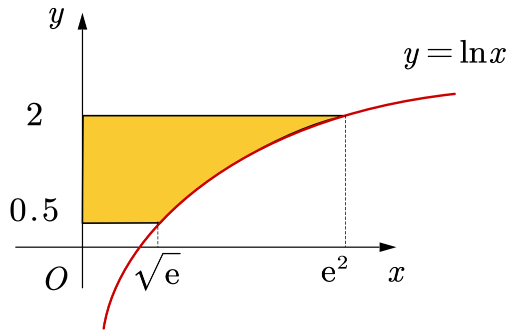
（5） 利用圆的面积，$\frac{\pi}{4}$。

【例题 7.2.2 基础题】（2022 年 数学一 5 分）$\int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$__________.

答案：4

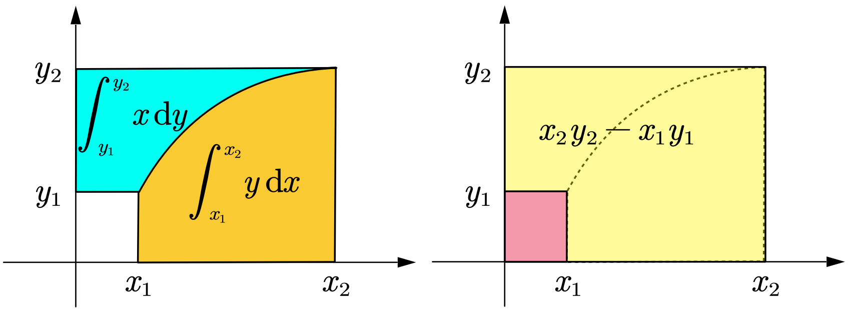
解析：$\int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_{1}^{e} \frac{2\ln t}{t} 2t\, dt = 4\int_{1}^{e} \ln t\, dt = 4(t\ln t - t)\big|_{1}^{e} = 0-(-4) = 4$

利用定积分理解分部积分公式：假如我们要求下面图示阴影区域的面积



由于$y = \ln x, x = e^y$，所以面积有：

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^y dy = e^y\big|_{\frac{1}{2}}^{2} = e^2 - e^{\frac{1}{2}}$$



$$\int_{x_1}^{x_2} y dx + \int_{y_1}^{y_2} x dy = x_2 y_2 - x_1 y_1 = xy\big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = xy\big|_{x_1}^{x_2} - \int_{y_1}^{y_2} x dy$$

【例题 7.2.3 基础题】计算定积分$\int_{0}^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}\, dx$

答案：

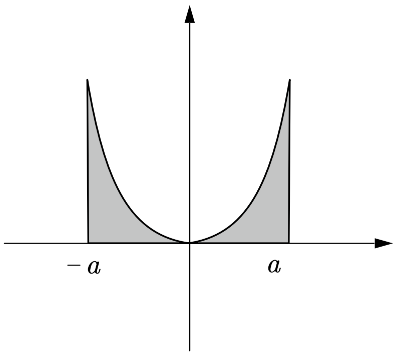
$$\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x|\cos x||\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

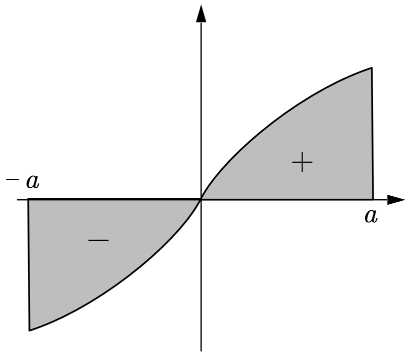
巧算定积分：利用奇偶性

如果$f(x)$是奇函数，那么$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$；

如果$f(x)$是偶函数，那么$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.



偶函数



奇函数

【例题 7.2.4 基础题】计算下列定积分

（1）$\int_{-2}^{2}\left(\ln\frac{3+x}{3-x}+x^2\right)\mathrm{d}x$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

（3）$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

（1）$\ln\frac{3+x}{3-x}$ 为奇函数，$\int_{-2}^{2}\left(\ln\frac{3+x}{3-x}+x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$

（2）

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{8}$$

（3）$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2+(1-x^2)\mathrm{d}x=2$

【例题 7.2.5 中等题】如果函数$f(x)$在实数域内有定义

（1）$f(x)$始终满足：$f(3-x)+f(5+x)=6$，求$\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$f(x)$始终满足：$f(2+x)=f(8-x)$，且$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=-1$，求$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

答案：（1）$f(x)$关于点$(4,3)$对称，所以$\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=4\times 3=12$.

（2）$f(x)$关于$x=5$轴对称，$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=-2$.

巧算定积分：华莱士公式

华莱士公式用于解决三角函数在特定区间内的定积分结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为正奇数}\end{cases}$$

【例题 7.2.6 基础题】计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,\mathrm{d}x$

答案：（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{8}{15}$

【例题 7.2.7 中等题】计算下列定积分

（1）$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x$

（3）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x$

答案：

（1）$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15\pi}{16}$

（3）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$

【例题 7.2.8 基础题】（2012 年 数学一 4 分）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$

答案：$\frac{\pi}{2}$

解析：

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \xlongequal{x-1=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dx=\frac{\pi}{2}$$

【例题 7.2.9 拔高题】（2019 年 数学一/数学三 10 分）设

$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（1）证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

（1）证明：

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

而在$0\le x\le 1$时，$x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\le 0$，所以可知$a_{n+1}-a_n<0$，该数列递减。

另外：

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} t\,dx$$

记$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dx$，根据华莱士公式：

$$I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为正奇数}\end{cases}$$

所以：

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

$$a_n=I_n-I_{n+2}=\frac{I_n}{n+2}$$

$$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{I_n}{n-1}$$

由此可得：

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

（2）根据上一问结论，$\{a_n\}$递减，可知：

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$$

而 $\frac{a_n}{a_{n-1}}>\frac{a_n}{a_{n-2}}$，所以有：

$$\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$$

并且：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$

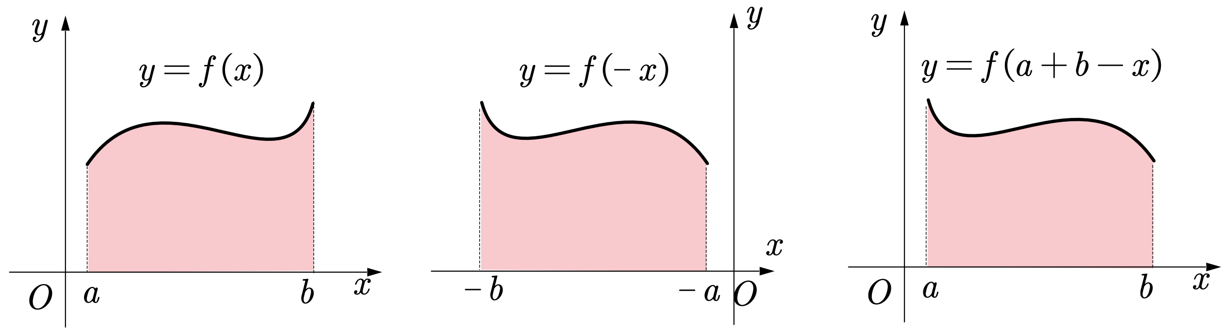
根据夹逼准则，可知该极限为 1。

巧算定积分：区间内对称

对于函数$f(x)$，其在区间$[a,b]$中有定义，而当计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时，可将被积函数中的x替换为$(a+b-x)$，该定积分的数值保持不变，如以下公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

原理解释：将被积函数在$[a,b]$区间内的图像进行左右镜像翻转，则面积不变。



【例题 7.2.10 基础题】计算 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解：令$t=\frac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

设$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，则有

$$2I=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\frac{\pi}{4}$$

【例题 7.2.11 基础题】计算$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}dx\xrightarrow{x=-t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^4(-t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 t}{1+e^t}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx$$

$$2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{8}\pi$$

$$I=\frac{3\pi}{16}$$

【例题 7.2.12 基础题】计算 $I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$.

解：

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx\xrightarrow{6-x=t}\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}(-dt)$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx.$$

$2I=\int_2^4 1\,dx=2$，即 $I=1$.

【例题 7.2.13 中等题】（2023 数学一 5 分）设连续函数满足 $f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)dx=0$，则 $\int_1^3 f(x)dx=$________.

解答：

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1[f(x)+x]dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

7.3 定积分的应用

几何应用

1. 计算平面图形的面积：曲线$y=f_1(x)$与$y=f_2(x)$及$x=a,x=b(a<b)$所围成的平面图形的面积

$$S=\int_a^\beta|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$$

2. 曲线弧长：曲线$y=f(x)$在$x\in[a,b]$之间的曲线长度为：

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

3. 旋转体

（1）曲线$y=y(x)$与$x=a,x=b(a<b)$及x轴围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所

得到的旋转体的体积

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

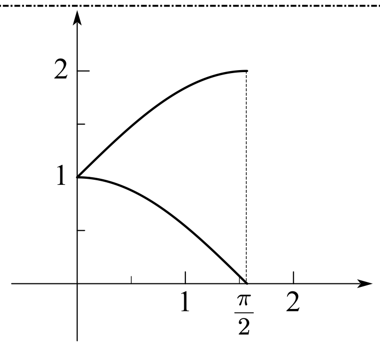
该旋转体的侧面积为：

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

（2）曲线$y=f(x)$与$x=a,x=b(0\leqslant a<b)$及x轴围成的曲边梯形绕y轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\mathrm{d}x$$

【例题 7.3.1 基础题】由曲线$f(x)=\sin x+1$、$g(x)=\cos x$、$x=0$、$x=\frac{\pi}{2}$所围成的图形，求该图形的面积，以及绕x轴旋转一周得到的立体体积。



解：

面积：

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1-\cos x)\,\mathrm{d}x=(-\cos x+x-\sin x)|_0^{\pi/2}$$

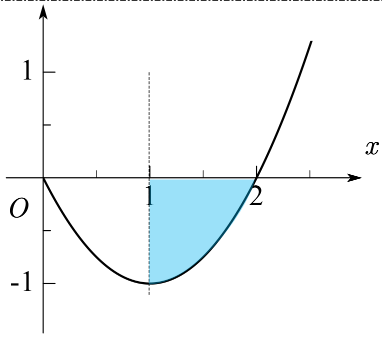
$$=\frac{\pi}{2}$$

旋转体体积：

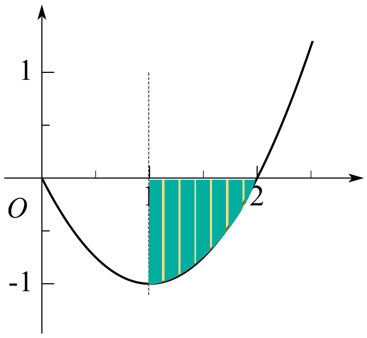
$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi[g(x)]^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin x+1)^2-\cos^2x]\,\mathrm{d}x$$

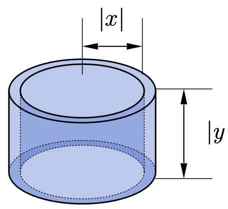
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2x+2\sin x+1-\cos^2x]\,\mathrm{d}x=\pi\left(2+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi+\frac{\pi^2}{2}$$

【例题 7.3.2 基础题】函数$y=x^2-2x$在$x\in[1,2]$之间的曲线段与x轴以及$x=1$围成平面图形，求该平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积。



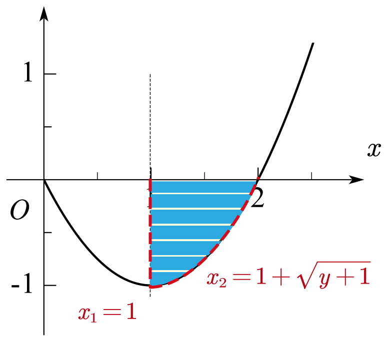
方法一（竖切）：$V=\int_1^2 2\pi x|y|\mathrm{d}x=\int_1^2 2\pi x|x^2-2x|\mathrm{d}x=2\pi\int_1^2(2x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{11\pi}{6}$

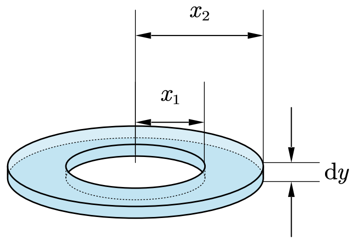




方法二（横切）：$V=\pi\int_{-1}^0(x_2^2-x_1^2)\mathrm{d}y$，其中$x_2=1+\sqrt{y+1}$，$x_1=1$，于是

$$V=\pi\int_{-1}^0\left(1+\sqrt{y+1}\right)^2\mathrm{d}y-\pi=\frac{11\pi}{6}$$





【例题 7.3.3 基础题】（2021 年数学二 12 分）设函数$f(x)$满足

$\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^2-x+C$,$L$为曲线$y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$．记$L$的长度为$s$,$L$绕$x$轴

旋转所成旋转曲面的面积为A，求s和A．

答案：根据题目信息可知，

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{x}{3}-1,\ f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{3}-\sqrt{x}$$

所以：

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

则有：

$$\begin{aligned}s&=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_4^9\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}}\mathrm{d}x\\&=\int_4^9\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_4^9\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x}\right)\Bigg|_4^9=12-\frac{14}{3}=\frac{22}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_4^9\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_4^9\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi\left(\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_4^9=\frac{425\pi}{9}\end{aligned}$$

$s=\dfrac{22}{3}$，$A=\dfrac{425\pi}{9}$。

【例题 7.3.4 基础题】（2024 年 数学二 12 分）设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$与直线$x=t,x=2t$及$x$轴围成，$D$绕$x$轴旋转一周所成旋转体的体积为$V(t)$，求$V(t)$的最大值。

答案：

$$\begin{aligned}V(t)&=\pi\int_t^{2t}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{-2}-\pi\int_t^{2t}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2x}(1+2x)\Big|_t^{2t}\\&=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2t}(1+2t)-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-4t}(1+4t)\end{aligned}$$

为使其达到最大值，则对应导数为 0，得到：

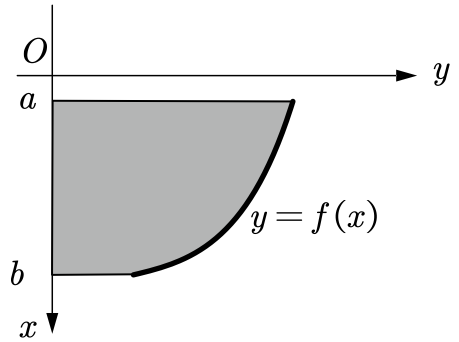
$$\begin{aligned}&V'(t)=-\pi t\mathrm{e}^{-2t}+4\pi t\mathrm{e}^{-4t}=0\\&\mathrm{e}^{2t}=4,t=\ln 2\end{aligned}$$

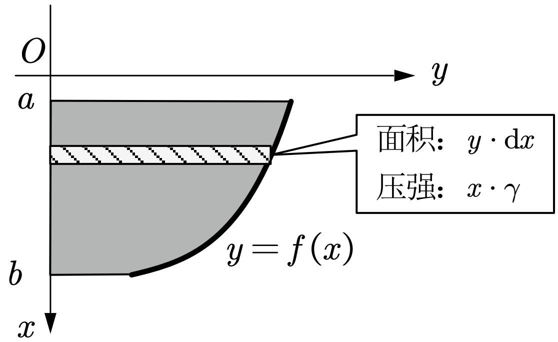
$$V_{\max}=V(\ln 2)=\frac{\pi}{16}(1+2\ln 2)-\frac{\pi}{64}(1+4\ln 2)=\frac{\pi\ln 2}{16}+\frac{3\pi}{64}$$

物理应用（仅数学一、数学二）

液体压强：在液面下深度为h处，由液体重量产生的压强等于它的深度h与液体比重γ（密度ρ与重力加速度g相乘）的乘积：$p=\gamma h=\rho gh$．并且同一点的压强在

各个方向都是相等的。设一薄板垂直放在均匀的静止液体中，如下图所示，y轴为水平面，灰色区域为薄板，边沿曲线为$y=f(x)$：

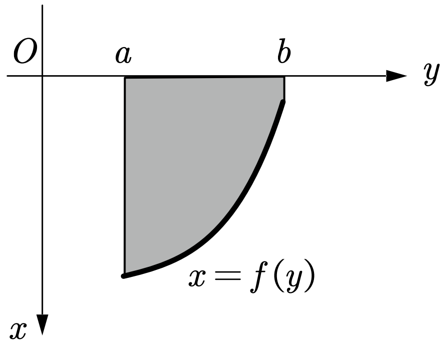


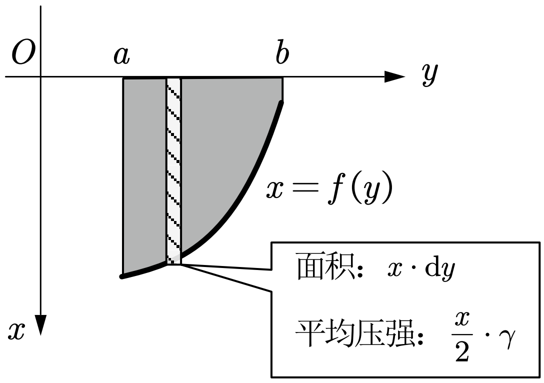


则液体对薄板的侧压力如下：

$$P=\int_a^b \gamma x f(x)\mathrm{d}x$$

如果薄板类型如下，则可换另一种分析和计算方法：





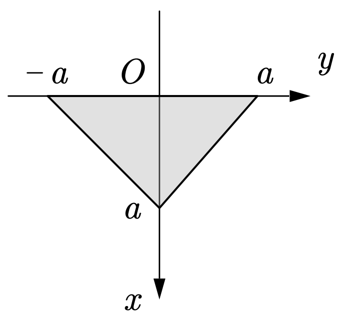
液体对薄板的侧压力如下：

$$P=\int_a^b \frac{\gamma f^2(y)}{2}\mathrm{d}y$$

【例题 7.3.5 基础题】（2020 数学二 4 分）斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐．记重力加速度为g，水的密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为_____.

答案：$\frac{1}{3}a^3\rho g$

解析：如下图所示建立坐标系，根据对称性可知只需计算第一象限内（$x>0,y>0$）内的压强，整个平板是该区域的二倍。



方法一（横切）：$P=2\int_{0}^{a}\rho gx(a-x)\mathrm{d}x=2\left(\frac{a\rho gx^{2}}{2}-\frac{\rho gx^{3}}{3}\right)\Big|_{0}^{a}=\frac{a^{3}\rho g}{3}$

方法二（竖切）：$P=2\int_{0}^{a}\frac{\rho g(a-y)^{2}}{2}\mathrm{d}y=-\frac{\rho g}{3}(a-y)^{3}\big|_{0}^{a}=\frac{a^{3}\rho g}{3}$

变力做功：设一物体沿x轴运动，在运动过程中始终有力F作用于物体上，物体在x处的力为$F(x)$，则物体从a移到b时变力$F(x)$做的功为

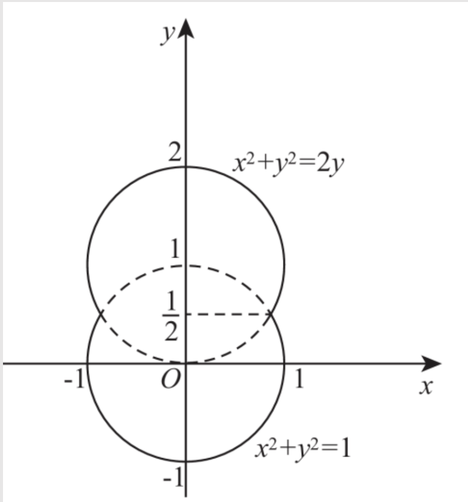
$$W=\int_{a}^{b}F(x)\mathrm{d}x$$

【例题 7.3.6 中等题】（2011 数学二 11 分）一容器的内侧是由右图中曲线绕y轴旋转一周而成的曲面，该曲线由$x^{2}+y^{2}=2y\left(y\geq\frac{1}{2}\right)$与$x^{2}+y^{2}=1\left(y\leq\frac{1}{2}\right)$连接而成。

（I）求容器的容积；

（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位为 m，重力加速度为g $\mathrm{m/s^{2}}$，水的密度为$10^{3}\mathrm{kg/m^{3}}$.）



(I)从图中不难得出，容器的上半部分（$y\geq\frac{1}{2}$）的体积为容器体积的一半。所以容器体积为：

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^{2}\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^{2})\mathrm{d}y=2\pi\left(y^{2}-\frac{y^{3}}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9\pi}{4}\text{（单位：m}^{3}\text{）}$$

(II)方法一（积分分析）抽出上半部分（$y\geq\frac{1}{2}$）所需做功：

$$W_1=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi(2y-y^2)10^3g(2-y)\mathrm{d}y=10^3\pi g\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)\mathrm{d}y$$

$$=10^3\pi g\left(2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{63}{64}\times10^3\pi g$$

抽出下半部分（$y\geq\frac{1}{2}$）所需做功：

$$W_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)10^3g(2-y)\mathrm{d}y=10^3\pi g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y$$

$$=10^3\pi g\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\frac{153}{64}\times10^3\pi g$$

总做功$W=W_1+W_2=\dfrac{63+153}{64}\times10^3\pi g=\dfrac{27}{8}\times10^3\pi g$

方法二（等效法）整个容器中水的质量为$\frac{9}{4}\pi\times10^3g$，该容器上下对称，抽出全部水相当于把水都从$y=\frac{1}{2}$的高度提高到$y=2$的位置，抬升量为$\Delta y=\frac{3}{2}$，所以做功为：

$$W=\frac{9}{4}\pi\times10^3g\times\frac{3}{2}=\frac{27\times10^3}{8}\pi g\ (\text{单位：J})$$

质量与质心：对于平面坐标系中的一段曲线$y=f(x)(a\leq x\leq b)$，假设其是一段有质量的绳索。线密度ρ是指它质量与长度的比值。而对于一个线密度不均匀的曲线，其线密度是随坐标变化的函数$\rho=\rho(x)$，则此曲线的质量为：

$$M=\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

该曲线的质心为$(\bar{x},\bar{y})$，则：

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x},\quad\bar{y}=\frac{\int_a^b y\rho(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}$$

【例题 7.3.7 基础题】（2014 数学二 4 分）一根长度为 1 的细棒位于x轴的区间$[0,1]$上，若其线密度$\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标$\bar{x}=$______.

答案：$\dfrac{11}{20}$

解析：

首先求得细棒的总质量$M=\displaystyle\int_0^1(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$

质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x}{M}=\frac{3}{5}\int_0^1(-x^3+2x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{11}{20}$$

引力做功：质量分别为m_1,m_2相距为r的两质点间的引力的大小为$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$，

其中G为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线方向.

【例题 7.3.8 基础题】（2025 数学二 5 分）设单位质点P,Q分别位于点$(0,0)$和$(0,1)$处，P从点$(0,0)$出发沿x轴正向移动，记G为引力常量，则当质点P移动到点$(l,0)$时，克服质点Q的引力所做的功为

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.　　D. $\int_0^t \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

答案：B

经济应用（仅数学三）

已知边际成本为$C'(q)$，其中q为产品数量，则总成本为：

$$C(q)=\int_0^q C'(t)\mathrm{d}t+\text{固定成本}$$

【例题 7.3.9 基础题】（2012 数学三 10 分）某企业为生产甲，乙两种型号的产品投人的固定成本为 10000（万元）．设该企业生产甲，乙两种产品的产量分别为x（件）和y（件），且这两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$（万元 / 件）与$6+y$（万元 / 件）.

（I）求生产甲，乙两种产品的总成本函数$C(x,y)$（万元）;

（II）当总产量为 50 件时，甲，乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小总成本;

（III）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

答案：

（I）总成本由“固定成本+甲产品可变成本+乙产品可变成本”组成。

甲产品可变成本$C_x=\int_0^x\left(20+\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=20x+\frac{x^2}{4}$

乙产品可变成本$C_y=\int_0^y(6+t)\mathrm{d}t=6y+\frac{y^2}{2}$

$$C(x,y)=10000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}.$$

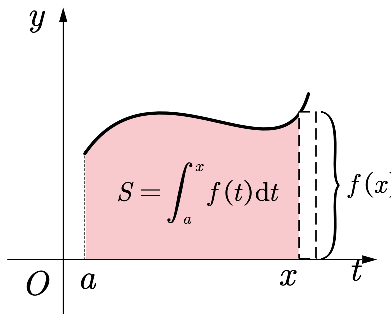
（II）将$y=50-x$代入，可得：

$$C=10000+20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{(50-x)^2}{2}$$

求导，使$C'=0$，此时$x=24$，意味着当甲产量为 24 件，乙产量为 26 件时，总成本达到最小，为 11118 万元.

（III）代入$x=24$，此时甲产品边际成本为 32 万元，其经济意义：当生产甲产品 24 件，生产第 25 件甲产品需 32 万元.

7.4 变上限积分



对于变上限积分函数，我们常用到的是它的导数。

变上限积分的可导性与导数：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则变上限积分$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$[a,b]$上的可导函数，且$\Phi'(x)=f(x),x\in[a,b]$. 即：

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

而这种题目有相应的变体，我们也需要掌握：

（1）$\left(\int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$，变化的上限是$g(x)$，利用复合函数求导；

（2）$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\int_0^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'$，上下限中均含有变量；

（3）$\left(\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，被积表达式中有可提取的$x$；

（4）$\left(\int_0^x f(xt)\mathrm{d}t\right)'=\left(\int_0^{x^2}\frac{f(u)}{x}\mathrm{d}u\right)'=\left(\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u\right)'$，利用换元进行处理。

【例题 7.4.1 基础题】求下列不同函数$S(x)$所对应的$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$.

（1）$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

（2）$S(x)=\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{\arctan t}\mathrm{d}t$

（3）$S(x)=\int_{\sin x}^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$

（4）$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{x^2+t^2}\mathrm{d}t$

（5）$S(x)=\int_0^x \sin^4(t+x)\mathrm{d}t$

（1）$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}$

（2）$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\arctan(\sin x)}\cdot\cos x$

（3）$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=2x\frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{x^2}}-\cos x\frac{\sin(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin x}}$

（4）$S(x)=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{x^2}=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x^2}$

（5）换元，令$u=t+x, du=\mathrm{d}t$

$$S(x)=\int_x^{2x}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=2\sin^4(2x)-\sin^4 x$$

【例题 7.4.2 基础题】（2011 数学一/数学二 5 分）曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的弧长$s=$

答案：$\ln(1+\sqrt{2})$

【例题 7.4.3 基础题】（2016 数学一 4 分）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$

答案：$\frac{1}{2}$

【例题 7.4.4 基础题】在$x\to 0$时，请指出下列变量是关于x的几阶无穷小：

（1）$\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t$

（2）$\int_0^{x^2}\sin(t^3)\mathrm{d}t$

（3）$(1-\cos x)\int_0^x[1-\cos(x^2)]\mathrm{d}t$

（1）3 阶
（2）8 阶
（3）7 阶

【例题 7.4.5 基础题】（2024 数学三 5 分）当$x\to 0$时，$\int_0^x\frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos t^2}\mathrm{d}t$与$x^k$是同阶无穷小，则$k=$______.

答案：3

【例题 7.4.6 基础题】设$F(x)=\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$，则曲线$y=F(x)$

（A）在$(-\infty,0)$是凹的，在$(0,+\infty)$是凸的.

（B）在$(-\infty,0)$是凸的，在$(0,+\infty)$是凹的.

（C）在$(-\infty,+\infty)$是凹的.

（D）在$(-\infty,+\infty)$是凸的.

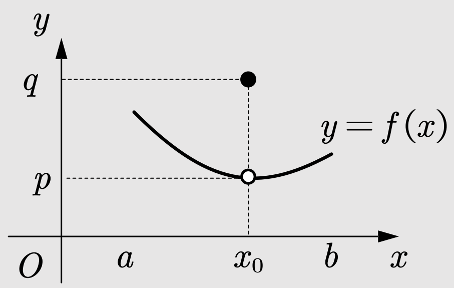
答案：B

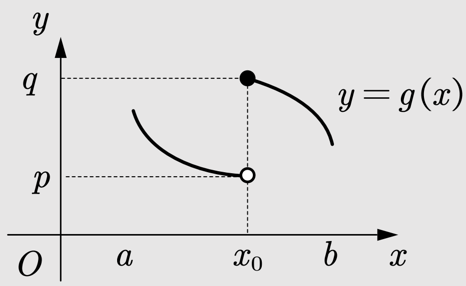
解析：$F'(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$，而$F''(x)=2x\ln(1+x^4)$，

在$x\in(-\infty,0)$时，$F''(x)<0$，是凸的；在$x\in(0,+\infty)$时，$F''(x)>0$，是凹的。

【例题 7.4.7 基础题】如果$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上有定义，其图像如下所示，两者在$x=x_0$处分别存在可去和跳跃间断点（区间内其他位置均连续）。记

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则以下说法正确的是________.





(1) $F(x)$在$x=x_0$处连续；
(2) $F(x)$在$x=x_0$处可导；
(3) $G(x)$在$x=x_0$处连续；

(4) $G(x)$在$x=x_0$处可导；

(5) $F'(x_0)=q$.

(6) $G(x)$在$x=x_0$处左导数为p，右导数为q。

答案：（1）（2）（3）（6）

【例题 7.4.8 中等题】下列叙述错误的是________.

(1) 设$f(x)$在$[-a,a]$上连续为奇函数，则$f(x)$在$[-a,a]$上的全体原函数为偶函数。

(2) 设$f(x)$在$[-a,a]$上连续为偶函数，则$f(x)$在$[-a,a]$上的全体原函数为奇函数。

(3) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，以T为周期，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$也是以T为周期的函数。

(4) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，以T为周期且$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$也是以$T$为周期的函数。

答案：(2) (3)

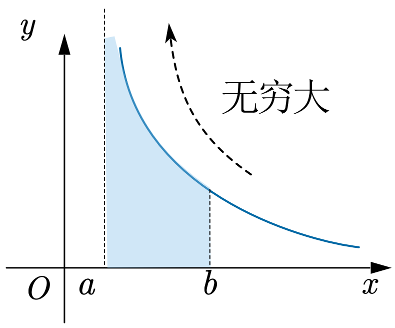
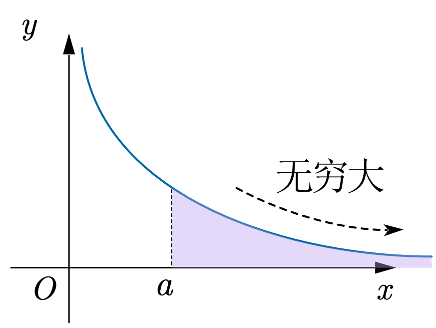
解析：奇函数一定会过原点，不定积分的结果有“$+C$”，不一定可以能满足这一点，所以(2)错误。

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$如果是周期函数，则必然要满足：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$，这要求函数$f(x)$在一个完整周期内的定积分为 0：

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$$

7.5 广义积分（反常积分）

广义积分，也被称为“反常积分”，它有如下两种类型：

<table>
<tr><td>类型</td><td>无界函数（瑕积分）</td><td>无穷区间</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>表达式</td><td>$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$</td><td>$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
</table>

	（$x=a$也被称为瑕点）	
计算	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$
敛散性	广义积分的计算实际上是一种极限运算。 极限存在则该广义积分收敛，否则就是发散的。	

关于广义积分，涉及两种考法：一种是计算广义积分的数值，这类问题常常比较简单，只需要把广义积分当作常规的定积分来计算即可，搭配极限解出数值；另一种则是判断广义积分的敛散性（简称“判敛”），这类问题需要搭配一系列的结论和方法来处理。

【例题 7.5.1 基础题】计算广义积分

（1）$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^3}\mathrm{d}x$

（2）$\int_2^4\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}\mathrm{d}x$

答案：

（1）$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^3}\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^3}\mathrm{d}(\ln x)=-\frac{1}{2(\ln x)^2}\Big|_3^{+\infty}=\frac{1}{2(\ln 3)^2}$

（2）

$$\int_2^5\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}\mathrm{d}x=\int_2^5\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\mathrm{d}x+\int_3^5\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=3\sqrt[3]{x-3}\Big|_2^3+3\sqrt[3]{x-3}\Big|_3^5=3+3\sqrt[3]{2}$$

【例题 7.5.2 基础题】（2023 数学二 12 分）已知平面区域

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\right\}$$

（1）求D的面积

（2）求D绕x轴旋转所得旋转体的体积

答案：（1）

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\ln(1+\sqrt{2})$$

（2）

$$V=\pi\int_1^{+\infty}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]\Bigg|_1^{+\infty}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

【例题 7.5.3 基础题】（2024 数学三 5 分）$\int_2^{+\infty}\frac{5}{x^4+3x^2-4}dx=$______.

答案：$\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi$

解析：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{5}{x^4+3x^2-4}=\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}\\&=\frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\end{aligned}$$

并解得：$A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=0,D=-1$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\bigg|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{8}\pi.$$

接下来我们学习在不求出原函数的情况下，如何判定广义积分的敛散性。比如判断下列广义积分的敛散性：

$$\int_0^1\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\ \int_2^{+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x,\ \int_2^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x,\ \int_1^3\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

广义积分的第一件事：拆分

一个广义积分内可能包含多个瑕点，这时需要将其按照积分上下限进行拆分，使得每次**只能处理瑕点的一侧**。比如分析下面的广义积分类型，需要经历拆分再分析它们的敛散性：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$

（3）$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x\\&+\int_3^5\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x+\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

（4）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\mathrm{d}x$

（6）$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{5x+2}{x^2+x}+\frac{4-2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{5x+2}{x^2+x}+\frac{4-2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{5x+2}{x^2+x}+\frac{4-2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$

按照这六道题的演示进行拆分，在后续的分析中，如果等号右侧每个广义积分均为收敛的，则说明原表达式就是收敛的；如果至少有一个广义积分是发散的，则原表达式是发散的。

* 注意（6）题中，不可将被积函数拆分：$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{5x+2}{x^2+x}+\frac{4-2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{5x+2}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4-2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$，这样处理可能得出

错误结论。

幂函数有关的广义积分

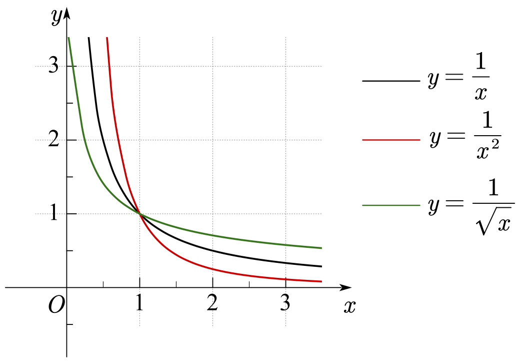
重要基本公式：

（1）$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛 ,p>1,\\ 发散 ,p\leqslant 1,\end{cases}$

（2）$\int_0^a\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛,\ p<1,\\ 发散,\ p\geqslant 1.\end{cases}$

其中a是任意正数。

我们可以借助下面的大小关系图，来帮助理解上面的结论公式：



（以$y=\frac{1}{x}$作为分水岭，大的就发散，小的就收敛。）

广义积分的比较原理：设$f(x),g(x)$在$[a,+\infty]$连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x<+\infty)$.

（1）若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛。

（2）若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也发散。

比如以下广义积分的敛散性：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散

（2）$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛

（3）$\int_1^{+\infty}x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x$ 收敛

系数处理

常系数不影响反常积分的敛散性。比如下列广义积分的敛散性：

（1）$\int_0^1-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x\xrightarrow{敛散性等效于}\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$（发散）

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{3x}}\mathrm{d}x\xrightarrow{敛散性等效于}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$（收敛）

（3）$\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{\sqrt{-9x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$（发散）

重要推广：被积函数中，与**无穷小、无穷大皆不相关**的部分，可以直接**当作系数**处理。比如判断下列广义积分的敛散性：

（1）$\int_{2}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{2}^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$（收敛）

（2）$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$（收敛）

（3）$\int_{2}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$（发散）

平移转化

如果在$x=a$处为广义积分的瑕点，则优先考虑进行换元$t=x-a$（或$t=a-x$），比如下列广义积分的处理：

（1）$\int_{1}^{3}\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{0}^{2}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$（发散）

（2）$\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$（收敛）

（3）$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{0}^{1}\frac{1}{2(x-1)}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t$（发散）

（4）$\int_{4}^{5}\frac{1}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x=\int_{4}^{5}\frac{1}{(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{4}^{5}\frac{1}{x-4}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$（发散）

【例题 7.5.4 基础题】判断下列四个反常积分的敛散性

（1）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$

（2）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}$

（3）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

（4）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$

答案：（3）收敛，（1）（2）（4）发散。

等价代换、抓大放小

◆ 常见等价无穷小：比如 $x\to 0$, $\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim(\mathrm{e}^x-1)\sim\ln(1+x)\sim x$

◆ 无穷大中的常见比较：$x \to \infty, |x^a| \ll |x^b|$ $(0 < a < b)$

◆ 无穷小中的常见比较：$x \to 0, |x^a| \gg |x^b|$ $(0 < a < b)$

判断下列广义积分的敛散性：

（1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$（收敛）

（2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$（收敛）

（3）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+3x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_1^{+\infty}\frac{1}{3x^2}\mathrm{d}x$（收敛）

（4）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+3x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$（发散）

（5）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+4x^6}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^6}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+4x^6}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^6}}$

（收敛）

（6）$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_1^2 \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$（发散）

（7）$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sin^2[\pi+(x-\pi)]}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sin^2(x-\pi)}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{(x-\pi)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{x^2}$

（发散）

（8）$\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{\ln[1+(x-1)]}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}} \int_1^3 \frac{1}{(x-1)}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$（发散）

指数函数有关的广义积分

指数函数的广义积分基本结论：

$$\int_a^{+\infty} c^x\mathrm{d}x \begin{cases} 收敛, & 0<c<1 \\ 发散, & c\geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{a} c^x\mathrm{d}x \begin{cases} 发散, & 0<c\leq 1 \\ 收敛, & c>1. \end{cases}$$

重要推论：

（1）在瑕点处，如果被积函数里的指数函数呈现无穷小，则该广义积分一定收敛；

（2）在瑕点处，如果被积函数里的指数函数呈现无穷大，则该广义积分一定发散。

判断下列广义积分的敛散性：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^x}\mathrm{d}x$（收敛）

（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$（收敛）

（3）　$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{3^x}\mathrm{d}x$（收敛）

（4）　$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{1}{x}=t}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t$（发散）

（5）　$\int_{-2}^0 3^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{1}{x}=t}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{3^t}{t^2}\mathrm{d}t$（收敛）

（6）　$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{敛散性等效于}}\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$（两者都收敛，整体收敛）

对数函数有关的广义积分

涉及到$\ln x$有关的广义积分有三种瑕点：

（1）无穷限：比如$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^3}\mathrm{d}x$；

（2）$x=0$处的瑕点：比如$\int_0^{\frac{1}{2}}(\ln x)^3\mathrm{d}x$；

（3）$x=1$处的瑕点：比如$\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$、$\int_1^2\frac{1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$。

我们需要重点学习第一种情况，然后再依次处理第二、三种情况。

大小关系：当$x\to+\infty$时，有：$\ln x\ll x^n(n>0)$。比如$x\to+\infty$时，$(\ln x)^{100}\ll\sqrt[100]{x}$。

比如判断以下广义积分敛散性：

（1）　$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$，根据比较原则，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x>\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，后者发散，所以该式发散。

（2）　$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^5}\mathrm{d}x$，与上式同理，发散。

在处理对数函数有关的广义积分时，如果$x\to+\infty$，可以利用不等式$1<\ln x<\sqrt[100]{x}$，根据比较原则判断广义积分的敛散性。比如判断下列广义积分的敛散性：

（1）　$\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{\ln x}\mathrm{d}x$，根据比较原则，$\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{\ln x}\mathrm{d}x>\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[100]{x}}\mathrm{d}x$，后者发散，所以该式也发散；

（2）　$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，根据比较原则，$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt[10]{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，后者收敛，所以该式也收敛；

（3）　$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^5}{\sqrt{x^4+x}}\mathrm{d}x$，因为$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^5}{\sqrt{x^4+x}}\mathrm{d}x<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt[100]{x}}{\sqrt{x^4+x}}\mathrm{d}x$，后者收敛，所以该式也收敛；

（4）　$\int_5^{+\infty}\frac{\sqrt{x+5}\ln x}{x^3+3}\mathrm{d}x$，因为$\int_5^{+\infty}\frac{\sqrt{x+5}\ln x}{x^3+3}\mathrm{d}x<\int_5^{+\infty}\frac{\sqrt{x+5}\cdot\sqrt[100]{x}}{x^3+3}\mathrm{d}x$，后者

收敛，所以该式收敛；

（5） $\int_5^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，因为 $\int_5^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x>\int_5^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，后者发散，所以该式也发散。

有下列结论公式：

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^n}\mathrm{d}x\begin{cases}n>1,\text{收敛}\\ n\le 1,\text{发散}\end{cases}\quad (a>1)$$

判断下列广义积分的敛散性：

（1） $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$（收敛）

（2） $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$（发散）

（3） $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$（发散）

（4） $\int_3^{+\infty}\frac{x}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$（发散）

（5） $\int_3^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$（发散）

接下来看另一种情况：$x=0$处的积分瑕点。此时利用换元法，令$t=1/x$。比如判断下列广义积分的敛散性：

（1） $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\int_2^{+\infty}\frac{-1}{t^2\ln t}\mathrm{d}t$（收敛）

（2） $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\int_2^{+\infty}\frac{-1}{t\ln t}\mathrm{d}t$（发散）

最后一种情况：$x=1$处的积分瑕点。利用等价无穷小进行代换。

（1） $\int_1^{3}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{3}\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{敛散性等效于}}\int_1^{3}\frac{1}{(x-1)}\mathrm{d}x=\int_0^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$（发散）

（2） $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln 4x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln 4x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln 4x}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{敛散性等效于}}\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)}\mathrm{d}x$

（发散）

【例题 7.5.5 中等题】下列说法正确的是______.

A. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续是奇函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$.

B. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，又 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

C. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 均发散，则 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 可能发散，也可能收敛.

D. 若 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均发散，则不能确定 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛.

答案：C

【例题 7.5.6 拔高题】（2024 数学二 5 分）设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，给出以下三个命题：

(1) 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在.

其中真命题个数为（）

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

答案：B（只有说法 2 是对的）

（1）比如函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，有 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛而 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，说明当 $x\to+\infty$ 时，有：$f(x)\le\frac{1}{x^p}(p>1)$，而后者的无穷限积分是收敛的；

（3）比如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 2\\ \dfrac{1}{x(\ln x)^2}, & x>2\end{cases}$，$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而对于任意的 $p>1$ 都会使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 无穷大。

【例题 7.5.7 拔高题】设 n,m 为正整数，$I_{n,m}=\int_0^1 x^n \ln^m x\mathrm{d}x$ 是

（A）定积分且值为 $\dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^m}$

（B）定积分且值为 $\dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$

（C）反常积分且发散

（D）反常积分且值为 $\dfrac{(-1)^m m\ !}{(n+1)^{m+1}}$

答案：B

解析：由于极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln^m x = 0$，因此该积分不属于反常积分，而是普通的定积分。

而

$$\int_0^1 x^n \ln^m x \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln^m x \mathrm{d}(x^{n+1}) = \frac{x^{n+1}\cdot \ln^m x}{n+1}\Big|_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1} x \mathrm{d}x = -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1} x \mathrm{d}$$

$$I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}$$

比如 $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln^5 x \mathrm{d}x = -\frac{5}{4}\int_0^1 x^3 \ln^4 x \mathrm{d}x$，根据这个规律递推，可得：

$$I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1} = \left(-\frac{m}{n+1}\right)\left(-\frac{m-1}{n+1}\right)\left(-\frac{m-2}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^m} I_{n,0}$$

其中 $I_{n,0} = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，所以得出：

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$$

【例题 7.5.8 拔高题】（2013 数学一 10 分）计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中

$f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

答案：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}f(x) - \int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}(f(x)) \\
&= \left[2\sqrt{x}f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left[2\sqrt{x}\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t\right]\Bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\left[2\sqrt{x}\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t\right]\Bigg|_0^1 = 2\int_1^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t = 0$

此外，

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int_0^1 \frac{\ln(t^2+1)}{t}2t\,dt$$

$$=2\int_0^1 \ln(t^2+1)dt = 2t\ln(t^2+1)\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

$$=2\ln 2 - 4\int_0^1 (1-\arctan t)dt$$

$$=2\ln 2 - 4 + \pi$$

所以结果为 $8-2\pi-4\ln 2$

7.6 利用定积分进行数列求和

【例题 7.6.1 基础题】请将下列定积分写为数列求和形式：

（1）$\int_3^5 x^2 dx$

（2）$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

（1）$\int_3^5 x^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(3+\frac{2i}{n}\right)^2$

（2）$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)$

将数列无穷多项求和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 转换为定积分的步骤：

（1）从数列中抽出"$\frac{1}{n}$"，其将作为积分表达式中的"dx"；

（2）将剩余部分中的"$\frac{i}{n}$"写为"x"，该式即为 $f(x)$

（3）定积分区间为 0 到 1。

【例题 7.6.2 基础题】求极限：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\,{}_0^1=\ln 2$$

【例题 7.6.3 基础题】求极限：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

解：

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2+i^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n+\frac{i^2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{i}{n}}{1+\frac{i^2}{n^2}}\right)=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$$

7.7 概念辨析：定积分、不定积分、变限积分

对于函数$f(x)$而言，辨明下面两个概念的区别与联系：
不定积分存在：在区间$[a,b]$上，能找到函数$F(x)$，使得$F'(x)=f(x)$；
定积分存在（可积）：在区间$[a,b]$上，可以算出函数$f(x)$与x轴围成的面积，。

1. 不定积分存在定理：如果一个函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可导，则其导函数$f'(x)$在$[a,b]$内不可能存在第一类间断点和无穷间断点。所以，如果一个函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，但存在第一类间断点或者无穷间断点，那么它不可能在该区间是某个函数的导函数，也就是说$f(x)$在区间$[a,b]$上不存在原函数。

2. 定积分存在定理：$f(x)$在$[a,b]$上的定积分为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$。$f(x)$在$[a,b]$存在定积分，也称$f(x)$在$[a,b]$可积。其对应的条件如下：

（1）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在的充分条件（满足其中一条即可）：

A. $f(x)$在$[a,b]$上连续；
B. $f(x)$在$[a,b]$上单调；
C. $f(x)$在$[a,b]$上有界，且仅有有限个间断点。

（2）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在的必要条件：$f(x)$在$[a,b]$上有界。

注意：这里讨论的范围不包括广义积分，广义积分的存在性是另一套独立的理论体系。

【例题 7.7.1 基础题】下列函数在指定区间上不存在定积分的是

（A）$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\quad x\in[-1,1]$.

（B）$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0, x\in[a,b]\\ -1, x<0,\end{cases}$.

（C）$f(x)=\begin{cases}\tan x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\pm\frac{\pi}{2},\end{cases}\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

（D）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

答案：C 该函数在区间内无界，不满足存在定积分的必要条件。

【例题 7.7.2 基础题】（2016 年数学一/数学二 4 分）已知函数

$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

答案：D
解析：基于$F(x)$是$f(x)$的原函数，可排除 B、C 选项。而$f(1)=0$，说明$F'(1)=0$，$F(x)$在$x=1$处必须连续、可导，而 A 选项不连续。所以选 D。

【例题 7.7.3 中等题】请判断下面两个函数，在$x=0$处是否连续，以及在区间$[-1,1]$上是否存在不定积分与定积分：

（1）$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

（1）$f(x)$在$x=0$处为振荡间断点，存在不定积分，其一个原函数为$F(x)=$ $\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

$f(x)$在$x=0$附近无界，故不存在定积分。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，为**振荡间断点**，故不连续；

$f(x)$在$x=0$处为振荡间断点，存在不定积分，其一个原函数为$F(x)=$ $\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

$f(x)$在$[-1,1]$有界，只有一个振荡间断点，因而存在定积分。

第8讲 微分方程

8.1 微分方程的基本概念

来看一个最简单的微分方程：

$$y' = x$$

则可以得到：

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

这就是微分方程的解。需要注意到三个方面：

（1）微分方程最大的特点就是方程中含有导数项；

（2）求解微分方程，并非是要给y, x以确定的数值，而是解出y, x之间的关系式；

（3）微分方程的解并非是唯一的，需要加入一个未定参数C.

如果微分方程改变条件：

$$y' = x \ (x = 0, y = 1)$$

得到对应的解就变成唯一的：

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

由此，我们管“$x = 0, y = 1$”叫做这个微分方程的初始条件，对应的解分为“通解”和“特解”，顾名思义，就是针对微分方程本身的通用的解，以及针对特定条件所确定的唯一的解：

$$通解：y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$特解：y = \frac{x^2}{2} + 1$$

再比如另一个微分方程：

$$y'' = 2x$$

通过两次求原函数，可以得到它的通解为：

$$y' = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

由于出现的最高阶导数为二阶，所以该方程也叫做“二阶微分方程”，在二阶微分方程的通解中会存在两个独立的任意常数C_1和C_2。

1．微分方程：含有自变量x，自变量的未知函数y以及未知函数的导数（$y', y'', \cdots$）或微分$(\mathrm{d}y, \mathrm{d}x)$的方程式称为微分方程。
2．微分方程的阶数：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶。常见的有一阶和二阶微分方程。
3．微分方程的解：若把某个函数及其导数代入微分方程能使该方程恒成立，则称这个函数是该微分方程的一个解。微分方程解分为通解和特解：含有与微分方程的阶数相同个数的独立任意常数的解，称为微分方程的通解。通解也可以称为一般解；不含任意常数或任意常数确定后的解，称为微分方程的特解。

8.2 一阶微分方程

一阶微分方程方法如下：

方法名称	方程特征	求解方法
分离变量法	$y'=p(x)\cdot y$	$y=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$
线性方程公式法	$y'+p(x)y=q(x)$	$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$
齐次方程	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y=ux,y'=u+xu'$
伯努利方程（仅数学一）	$y'+p(x)y=q(x)y^n$	$u=y^{1-n},y'=\frac{y^n}{1-n}u'$

分离变量法

一阶微分方程如果可以化为如下格式：

$$f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$$

则可通过两侧各自求原函数的方式进行微分方程的求解。

【例题 8.2.1 基础题】求解微分方程：$y'=2xy$.

解：将题目中的y'写为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$$

当$y\neq 0$时，得到：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

左右两侧求不定积分：

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=x^2+C$$

而如果$y=0$，则代入原方程$y'=2xy$可成立。所以$y=0$也属于该方程的一个解。

将上述结果化简整理：

$$y=Ce^{x^2}$$

【例题 8.2.2 基础题】求解下列微分方程

(1) $y'=\frac{y}{x}$

(2) $y'=2y$

答案：

(1) $y=Cx$

(2) $y=Ce^{2x}$

【例题 8.2.3 基础题】连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，请写

出$f(x)$的表达式。

对题目给出的关系式，左右两侧对x求导数：

$$f'(x)=2f(x)$$

利用分离变量法解得：

$$f(x)=Ce^{2x}$$

由于$f(0)=\ln 2$，则$C=\ln 2$，所以

$$f(x)=e^{2x}\ln 2$$

【例题 8.2.4 基础题】设$f(x)$为定义在$[0,+\infty)$上的单调连续的凹函数，曲线$C: y=f(x)$通过点$(0,0)$及$(1,1)$，在曲线C上任取一点$M(x,y)$，设点$N(x,0)$，点$O(0,0)$，曲线C与直线MO围成的图形的面积记为S_1，三角形OMN的面积为S_2，已知S_1是S_2的$\frac{1}{5}$，试求$f(x)$表达式，以及曲线C与直线$y=x$围成的图形绕x旋转一周的体积。

解：根据题意列写方程：$\frac{xy}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，两侧求导为$\frac{2}{5}(xy'+y)=y$，

即$y'=\frac{3}{2x}y$

解该微分方程，得$y=Cx^{\frac{3}{2}}$，代入$(1,1)$可知$y=x^{\frac{3}{2}}$

旋转一周得体积为：$V=\int_0^1(\pi x^2-\pi x^3)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}$

线性方程公式法

线性微分方程的定义：方程中的未知函数y及其各阶导数（$y',y'',\cdots$）均以一次幂函数的形式出现。一阶的线性微分方程可以写作如下格式：

$$y'+p(x)y=q(x)$$

而它对应的通解公式为：

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

推理过程：原方程左右两侧同乘$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y'+e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y=q(x)$$

$$\left[y\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right]'=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)$$

$$y\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C$$

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

【例题 8.2.5 基础题】求解微分方程$y'+y\tan x=\cos x$

$p(x)=\tan x, q(x)=\cos x$，基于线性微分方程的公式可知：

$$y=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x+C\right]=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\cos x\,(x+C)$$

【例题 8.2.6 基础题】求解微分方程

（1）$y'\cos x-y\sin x=\cos x\sin^2 x$

（2）$y'x+3y=x^2$

（3）$y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=2+x$

（4）$(1+x^2)y'+\dfrac{y}{\arctan x}=1$

答案：

(1) $y=\sec x\left(\dfrac{\sin^3 x}{3}+C\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{x^5}{5}+C\right)$

(3) $y=(1+x^2)\left[\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}+2\arctan x+C\right]$

(4) $y=\dfrac{\arctan x}{2}+\dfrac{C}{\arctan x}$

【例题 8.2.7 基础题】求解微分方程：$(x-2xy-y^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=0$

此方程并非是关于y的线性方程，但是我们通过观察发现式中的x是线性的，则可以考虑把x当作因变量，把y当作自变量，进行转化：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1-2y}{y^2}x=1$$

进而：

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\left[\int\mathrm{e}^{\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\cdot 1\mathrm{d}y+C\right]=y^2+Cy^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}$$

【例题 8.2.8 基础题】（2019 年数学一 10 分）设函数$y(x)$是微分方程

$y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

答案：（1）$y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.（2）曲线$y=y(x)$在$(-\sqrt{3},0)$及$(\sqrt{3},+\infty)$内是凹的，在$(-\infty,-\sqrt{3})$及$(0,\sqrt{3})$内是凸的．拐点为

$\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$.

【例题 8.2.9 基础题】（2019 年 数学二/数学三 10 分）设函数$y(x)$是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(1)=\sqrt{e}$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）设平面区域$D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求$D$绕$x$轴旋转所得旋转体的体积.

(1) $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) $V=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$.

【例题 8.2.10 中等题】（2023 数学一 10 分）设曲线$y=y(x)$ $(x>0)$经过点$(1,2)$，该曲线上任意一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处切线在y轴上的截距。

（1）求$y(x)$

（2）求函数$f(x)=\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$在$(0,+\infty)$上的最大值。

答案：（1）根据题目信息可知：切线在y轴上的截距为$y-y'x$，则$x=y-y'x$

解该微分方程可得：$y=x(-\ln x+C)$

由$y(1)=2$可知$C=2$，于是$y(x)=x(2-\ln x)$

（2）$f(x)=\int_1^x t(2-\ln t)\mathrm{d}t$，$f'(x)=x(2-\ln x)$，令导数为 0，可知驻点$x=e^2$

且当 $0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^2$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $x=e^2$ 处取得极大值，同时也取得最大值，且最大值为 $f(e^2)=\int_1^{e^2}x(2-\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^4-\frac{5}{4}$.

齐次方程变换

对于如以下形式的微分方程：

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

可以采取换元的策略进行求解，令$u=\frac{y}{x}$，则有：$y=xu,y'=u+xu'$。

【例题 8.2.11 基础题】求解微分方程：$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$.

解：左右除以x^2，将等式中的每一项化为关于$\left(\frac{y}{x}\right)$的表达式

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$$

将$y=ux, y'=u+xu'$代入方程中，再分离变量求解：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=u\mathrm{d}u$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+C$$

【例题 8.2.12 基础题】解微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

答案：令$u=\frac{y}{x}$, 则$y'=u+xu'$, 代入原方程得

$$\frac{u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u$$

分离变量$\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|$，即$\sin u=Cx$

故原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=Cx$$

【例题 8.2.13 基础题】（2024 数学一/数学二 5 分）微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为

答案： $x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y$

【解析】令 $x+y=u$，等式两边同时对 x 求导，得到 $u'=1+y'$，代入原式可得 $u'-1=\frac{1}{u^2}$，整理得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{u^2}$，即 $\int\frac{u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}x$, 求得 $u-\arctan u=x+c$，即 $y-\arctan(x+y)=c$, 把初始条件代入可得 $c=-\frac{\pi}{4}$，解得 $x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y$.

伯努利方程（仅数学一）

对于如以下形式的微分方程：

$$y'+p(x)y=q(x)y^n$$

设$u=y^{1-n}$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'=\frac{y^n}{1-n}u'$，代入可得：

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$$

【例题 8.2.14 基础题】求解微分方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{y^2}{x^2}$，得到满足$y|_{x=1}=1$的特解。

该方程符合伯努利方程特征，故设$u=y^{-1}$，于是$u'=-y^{-2}\cdot y',y'=-y^2\cdot u'=\frac{-u'}{u^2}$

$$\frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{ux}=\frac{1}{u^2x^2}$$
$$u'-\frac{1}{x}u=-\frac{1}{x^2}$$
$$u=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\cdot-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right]$$
$$u=x\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)=\frac{1}{2x}+Cx$$
$$y=\frac{2x}{1+2Cx^2}$$

根据定解条件，可知 $1=\frac{2}{1+2C}$，因而$C=\frac{1}{2}$，所以特解为$y=\frac{2x}{1+x^2}$

8.3 二阶微分方程

二阶微分方程，就是方程中最高存在二阶导数。最简单的二阶微分方程如下：

$$y''=f(x)$$

直接对右侧求两次原函数即可解决。二阶微分方程的通解中，需存在两个独立的任意常数（C_1,C_2）。

可降阶的二阶方程（仅数学一、数学二）

可降阶的二阶微分方程有如下两类：

（1）方程中没有y，表达式为$y''=f(x,y')$，则设$y'=p$，$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

（2）方程中没有x，表达式为$y''=f(y,y')$，则设$y'=p$，$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

【例题 8.3.1 基础题】求解微分方程：$(1+x^2)y''=2xy'$

由于方程中没有y，表达式为$y''=f(x,y')$，则设$y'=p$，$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入方程中得：

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=2xp$$

通过分离变量方法求解：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,\qquad \ln|p|=\ln(1+x^2)+C$$
$$|p|=(1+x^2)\cdot\mathrm{e}^C,\qquad p=C_1(1+x^2)$$

将$p=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1(1+x^2)$$

分离变量求解：

$$\mathrm{d}y=C_1(1+x^2)\mathrm{d}x,\qquad y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$$

【例题 8.3.2 基础题】求解微分方程：$2y\cdot y''+(y')^2=0(y>0)$

由于方程中没有x，表达式为$y''=f(y,y')$，则设$y'=p$，$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得：

$$2y\cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$$

此时为关于p、y的一阶微分方程，通过分离变量方法求解：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}y}{2y},\qquad \ln|p|=-\frac{1}{2}\ln y+C=\ln\frac{1}{\sqrt{y}}+C$$

$$|p|=\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot \mathrm{e}^C,\ p=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot \mathrm{e}^C=C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$$

又因为$p=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$，分离变量求解：

$$\sqrt{y}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2$$

$$y=\left(\frac{3}{2}C_1x+\frac{3}{2}C_2\right)^{\frac{2}{3}}$$

线性齐次方程

二阶常系数线性齐次微分方程：形式为 $y''+py'+qy=0$，p、q皆为常数。
求解时，需要求解一个对应的特征方程：$r^2+pr+q=0$，参照如下表格给出通解：

特征方程$r^2+pr+q=0$根的存在情况	微分方程$y''+py'+qy=0$的解
有两个不相等的实根r_1、r_2	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
两个复数根$r_1=a+bi$，$r_2=a-bi$	$y=\mathrm{e}^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【例题 8.3.3 基础题】求解微分方程：$y''-4y'+4y=0$

答案：

该方程中同样没有x，也可以通过设$y'=p$，$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$的流程实现降阶为一阶微分方程求解。

但是我们观察方程属于$y''+py'+qy=0$的形式，可以使用特征方程求解：

特征方程：$r^2-4r+4=0$，$r_1=r_2=2$

于是微分方程的解为：$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$

【例题 8.3.4 基础题】求解微分方程：$y''-2y'+5y=0$

答案：

特征方程：$r^2-2r+5=0$，$r_1=1+2i$，$r_2=1-2i$

于是微分方程的解为：$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

【例题 8.3.5 基础题】求微分方程$y''-3y'+2y=0$满足初始条件$y(0)=y'(0)=1$的特解。

答案：

$y''-3y'+2y=0$对应特征方程以及特征根为：

$$r^2-3r+2=0, r_1=1, r_2=2$$

由此该方程的通解为：

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

而需要满足初始条件，于是有：

$$y(0)=C_1+C_2=1$$

$$y'(0)=C_1+2C_2=1$$

解得：$C_1=1, C_2=0$，函数$y=f(x)=\mathrm{e}^x$。

【例题 8.3.6 基础题】（2023 数学一/二/三 5 分）若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则：

A. $a<0, b>0$　　B. $a>0, b>0$

C. $a=0, b>0$　　D. $a=0, b<0$

答案：C

【例题 8.3.7 基础题】（2024 数学二 12 分）设 $y(x)$ 为微分方程

$x^2y''+xy'-9y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$ 的解.

(1) 利用变换 $x=\mathrm{e}^t$ 将上述方程化为常系数线性方程，并求 $y(x)$

(2) 计算 $\displaystyle\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解析】(1) 对于 $x=\mathrm{e}^t$，有 $t=\ln x$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{x}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

从而原方程化为 $x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{x}-9y=0$

即 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-9y=0$，得通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}=C_1x^3+C_2x^{-3}$，代入

$y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$，解得 $C_1=2,C_2=0$，故 $y(x)=2x^3$.

(2)

$$\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_1^2 2x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx^2$$

$$\overset{t=4-x^2}{=\!=\!=}\int_0^3(4-t)\sqrt{t}\,dt=4\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^3=\frac{22}{5}\sqrt{3}$$

【例题 8.3.8 拔高题】（2020 年数学一 4 分）若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且 $f(0)=m,f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=$

答案：$am+n$

解析：根据二阶线性齐次方程的解的情况，其特征方程为：

$$r^2+ar+1=0$$

存在三种可能性：

①$a^2-4>0$，即 $a>2$，此时两个不同实数的特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$，

并且不难得出两个实数根都是负数。这时给出微分方程通解为：

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

②$a^2-4=0$，即 $a=2$，此时存在两个相同的实数根 $r_{1,2}=-1$，这时给出微分方程通解为：

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$$

③$a^2-4<0$，即 $a>2$，此时存在两个复数根，$r_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4-a^2}i}{2}$，给出微分方程的通解为：

$$y=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$$

通过微分方程，我们可以得出：

$$f(x)=-f''(x)-af'(x)$$

所以在处理积分时，可以得到：

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_{+\infty}^0[f''(x)+af'(x)]dx=[f'(x)+af(x)]\Big|_{+\infty}^0$$

上述三种情况中，都不难得出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以答案为：

$$f'(0)+af(0)=am+n$$

线性非齐次方程

关于二阶线性非齐次方程$y''+py'+qy=f(x)$的通解（$f(x)\neq 0$），包含两个部分：

$$y=Y+y^*$$

其中Y是齐次方程$y''+py'+qy=0$的通解，而y^*是非齐次方程$y''+py'+qy=f(x)$的一个特解。

为了获得y^*，需要分两种情况来讨论：

（1）如果$\boldsymbol{f(x)}=P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，则$y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，其中

$P_n(x)$为x的n阶多项式（$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n$，常数项就当作 0 阶多项式），$Q_n(x)$也是一样；

k的取值情况：如果α不是特征根，$k=0$；如果α是单特征根，$k=1$；如果α是双特征根，$k=2$.

（2）如果$\boldsymbol{f(x)}=[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$，则$y^*=x^k[Q_{l1}(x)\cos\beta x+Q_{l2}(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$

$P_m(x),P_n(x)$分别为x的m,n阶多项式，设$l=\max\{m,n\}$，$Q_{l1}(x),Q_{l2}(x)$均为x的l阶多项式；

k的取值情况：如果$\alpha\pm\beta i$不是特征根，$k=0$；如果$\alpha\pm\beta i$是特征根，$k=1$.

【例题 8.3.9 基础题】求微分方程$y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$的通解

首先求对应的齐次方程$y''-4y=0$的解，对应的特征方程为$r^2-4=0$，$r_1=2,r_2=-2$，于是齐次方程通解为：

$$Y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

接下来求特解，根据$f(x)=\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}$，特构造特解为：

$$y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$$

代回方程可得：

$$(Ax\mathrm{e}^{2x})''-4(Ax\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{e}^{2x}$$

$$A\mathrm{e}^{2x}(4x+4-4x)=\mathrm{e}^{2x},A=\frac{1}{4}$$

所以特解为

$$y^*=\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$$

方程的通解为：

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$$

【例题 8.3.10 基础题】

（1）$y''+y'=1$

（2）$y''-4y=x\mathrm{e}^x$

（3）$y''+2y'+5y=x^2$

（4）$y''-6y+9y=2\mathrm{e}^{3x}$

答案：

(1) $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}+x$

(2) $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{9}\right)\mathrm{e}^{x}$

(3) $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)+\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{4x}{25}-\dfrac{2}{125}$

(4) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}+x^2\mathrm{e}^{3x}$

【例题 8.3.11 中等题】求微分方程$y''+y'=(x\sin x+2\cos x)\mathrm{e}^x$的通解。

解：首先求对应的齐次方程$y''+y=0$的解，对应的特征方程为$r^2+r=0$，$r_1=0,r_2=-1$，于是齐次方程通解为：

$$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

根据$f(x)=(x\sin x+2\cos x)\mathrm{e}^x$，特构造特解为：

$$y^*=\mathrm{e}^x[(A+Bx)\cos x+(C+Dx)\sin x]x^0=\mathrm{e}^x[(A+Bx)\cos x+(C+Dx)\sin x]$$

并且求导，得到：

$$\begin{aligned}y^{*\prime}&=\mathrm{e}^x[(A+Bx)\cos x+(C+Dx)\sin x+B\cos x-(A+Bx)\sin x+D\sin x\\&\qquad+(C+Dx)\cos x]\\&=\mathrm{e}^x[(A+B+C+Bx+Dx)\cos x+(-A+C+D-Bx+Dx)\sin x]\\y^{*\prime\prime}&=\mathrm{e}^x[(2B+2C+2D+2Dx)\cos x+(-2A-2B+2D-2Bx)\sin x]\end{aligned}$$

代入微分方程，可得：

$$\begin{aligned}y^{*\prime\prime}+y^{*\prime}=\mathrm{e}^x[&(Bx+3Dx+A+3B+3C+2D)\cos x\\&+(-3Bx+Dx-3A-2B+C+3D)\sin x]\end{aligned}$$

所以可得方程为：

$$\begin{cases}B+3D=0\\A+3B+3C+2D=2\\-3B+D=1\\-3A-2B+C+3D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{27}{50}\\B=-\dfrac{3}{10}\\C=\dfrac{18}{25}\\D=\dfrac{1}{10}\end{cases}$$

$$y^*=\mathrm{e}^x\left[\left(\frac{27}{50}-\frac{3}{10}x\right)\cos x+\left(\frac{18}{25}+\frac{x}{10}\right)\sin x\right]$$

于是该方程的通解为：

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x\left[\left(\frac{27}{50}-\frac{3}{10}x\right)\cos x+\left(\frac{18}{25}+\frac{x}{10}\right)\sin x\right]$$

【例题 8.3.12 基础题】求微分方程$y''+y=\sin x$的通解。

首先求对应的齐次方程$y''+y=0$的解，对应的特征方程为$r^2+1=0$，$r_{1,2}=\pm i$，于是齐次方程通解为：

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

接下来求特解，根据$f(x)=\sin x=\mathrm{e}^{0\cdot x}\sin x$，特构造特解为：

$$y^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

代回方程可得：

$$[x(A\sin x+B\cos x)]''+x(A\sin x+B\cos x)=\sin x$$

$$-2B\sin x+2A\cos x=\sin x$$

$$A=0,B=-\frac{1}{2}$$

所以特解为

$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x$$

方程的通解为：

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$$

线性方程：解的结构与关联

对于常系数线性齐次方程，这里的“线性”和“齐次”都是针对y而言的，做一下深入的了解：

- **线性**，是指方程中的y,y',y''这些都是以一次幂的形式出现的，没有$y^2,\sin(y),\sqrt{y'}$这种非线性项；
- **齐次**,“齐次”指的是方程中每一项关于未知函数及其导数的次数都是相同的；
- **常系数**，指y,y',y''前面的系数项中仅为常数。

【例题 8.3.13 基础题】判断下面的微分方程的阶数、是否为线性，如果是线性方程，判断是否齐次。

(1) $y'+(\sin x)y=0$ （一阶线性齐次方程）
(2) $y''+\ln y=0$ （二阶非线性方程）
(3) $(y')^2+y^2=0$ （一阶非线性方程）
(4) $y'+2xy+x=0$ （一阶线性非齐次方程）

对于线性齐次方程$y''+py'+qy=0$，以及非齐次方程$y''+py'+qy=f(x)$，两者在等号左侧一致：设$y=y_1,y=y_2$是前者的两个解（齐次解），$y=y_3,y=y_4$是后者的两个解（非齐次解），则有如下结论：

① 齐次解 + 齐次解 = 齐次解

$y=y_1+y_2$是线性齐次方程$y''+py'+qy=0$的解。更进一步，$y=k_1y_1+k_2y_2$也是线性齐次方程$y''+py'+qy=0$的解（其中k_1和k_2是任意常数）。

② 非齐次解 + 齐次解 = 非齐次解

$y=y_3+y_1$、$y=y_3+y_2$、$y=y_4+y_1$、$y=y_4+y_2$这些都是线性非齐次方程$y''+py'+qy=f(x)$的解。

③ 非齐次解 - 非齐次解 = 齐次解

$y=y_3-y_4$或者 $y=y_4-y_3$，这些是线性齐次方程$y''+py'+qy=0$的解。

上述结论同样也适用于一阶线性方程$y'+p(x)y=q(x)$。

【例题 8.3.14 基础题】求解微分方程：$y''+y=\sin x+2\mathrm{e}^x$

解：该方程的解由三个部分组成，即$y = Y + y_1^* + y_2^*$，其中Y是对应右侧为 0 的齐次方程通解，y_1^*是对应右侧为$\sin x$的特解，y_2^*是对应右侧为$2\mathrm{e}^x$的特解。
①齐次方程为：$y'' + y = 0$，其通解为：$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
②通过之前的例题，我们得到$y'' + y = \sin x$的一个特解为：

$$y_1^* = -\frac{1}{2} x \cos x$$

③而$y'' + y = 2\mathrm{e}^x$的特解可以设为$y_2^* = A\mathrm{e}^x$，通过代入可得到$A = 1$，所以$y_2^* = \mathrm{e}^x$。
由此可知：

$$y = Y + y_1^* + y_2^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x + \mathrm{e}^x$$

【例题 8.3.15 基础题】已知微分方程$y'' + py' + qy = f(x)$（其中p, q皆为常数）的三个特解，分别为：$y_1 = -x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{2x}$，$y_2 = \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{2x}$，$y_3 = 7\mathrm{e}^{-x} + 3x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{2x}$。求出系数$p, q$、函数$f(x)$表达式，以及该微分方程的通解。

答案：该方程的解的结构应该为：

$$y = Y + y^*$$

其中Y是齐次方程的通解。
（1）关于y^*：y_1, y_2以及y_3中均含有$x\mathrm{e}^{2x}$保持不变，说明$y^* = x\mathrm{e}^{2x}$；
（2）关于Y：通过对其它y_1, y_2, y_3中其他部分的观察，可得：$Y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}$。
由此可知，该微分方程的特征根为$r_1 = r_2 = -1$，所以特征方程为：

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

所以可知系数$p = 2, q = 1$，该方程为$y'' + 2y' + y = f(x)$。再将$y^* = x\mathrm{e}^{2x}$代入左侧：

$$y^{*\prime} = (2x + 1)\mathrm{e}^{2x}$$
$$y^{*\prime\prime} = (4x + 4)\mathrm{e}^{2x}$$
$$y^{*\prime\prime} + 2y^{*\prime} + y^* = (9x + 6)\mathrm{e}^{2x}$$

所以$f(x) = (9x + 6)\mathrm{e}^{2x}$。
该微分方程的通解为：

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{2x}$$

【例题 8.3.16 中等题】（2016 年 数学一 4 分）若$y = (1 + x^2)^2 - \sqrt{1 + x^2}$，$y = (1 + x^2)^2 + \sqrt{1 + x^2}$是微分方程$y' + p(x)y = q(x)$的两个解，则$q(x) =$

（A）$3x(1 + x^2)$

（B）$-3x(1 + x^2)$

（C）$\dfrac{x}{1 + x^2}$

（D）$-\dfrac{x}{1 + x^2}$

答案：A

解析：令两个解相减，即$y=2\sqrt{1+x^2}$是齐次方程$y'+p(x)y=0$的一个特解，并且：

$$y'=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

代入$y'+p(x)y=0$可知：

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)2\sqrt{1+x^2}=0$$
$$p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$$

所以微分方程为$y'-\frac{x}{1+x^2}y=q(x)$，将$y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$代入，可得：

$$\begin{aligned}y'-\frac{x}{1+x^2}y&=4x(1+x^2)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+x^2}\left[(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}\right]\\&=4x(1+x^2)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=3x(1+x^2)\end{aligned}$$

欧拉方程（仅数学一）

形如以下格式的n阶微分方程，被称为欧拉方程：

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

令$x=\mathrm{e}^t$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$\cdots$$

即可得到y关于t的n阶常系数微分方程。

8.4 微分方程的物理应用（仅数学一、数学二）

【例题 8.4.1 中等题】（2015 年 数学二 10 分）已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比．现将一初始温度为120˚C的物体在20˚C恒温介质中冷却，30min 后该物体温度降至30˚C，若要将该物体的温度继续降至21˚C，还需冷却多长时间．

答案：设物体的温度为T，则T随时间t的变化过程，由数学公式表述即为：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20)$$

解该微分方程可得：

$$T=20+Ce^{-kt}$$

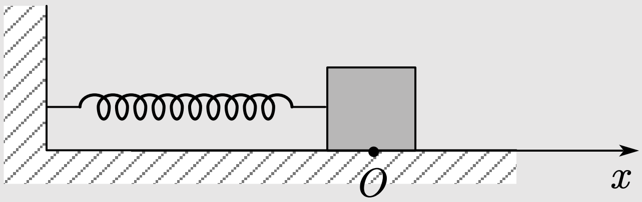
根据题目信息可知：$T(0)=120, T(30)=30$，由此可得：

$$C=100, k=\frac{\ln 10}{30}$$

$$T=20+100\times(10)^{-\frac{t}{30}}$$

令$T=21$，可得：$t=60$。而已经冷却了 30min，所以还需冷却 30min。

【例题 8.4.2 中等题】如图所示，一个质量为 2kg 的物块放在光滑平面上，弹簧另一端固定在壁面上，弹簧质量不计，弹簧的弹性系数为 18N/m（弹性系数：弹力与形变之间的比值）。以弹簧的平衡位置设为原点，右侧为x轴的正方向。在初始的瞬间，物块从原点出发，初始速度为向右的 4m/s，请写出接下来弹簧位移x随时间t的变化方程。



解：根据牛顿第二定律，可知：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{18}{2}x$$

即微分方程:

$$x''+9x=0$$

通解为：

$$x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$$

而代入初始条件：$x(t=0)=0, x'(t=0)=4$，可得：$C_1=0, C_2=\frac{4}{3}$。所以

$$x=\frac{4}{3}\sin(3t)$$

8.5 微分算子法（速算二阶线性非齐次的特解）

首先了解微分算子“D”的基本特征

■ 简记“$\frac{d}{dx}$”为“D”,于是有：$Dy=\frac{dy}{dx}$，$D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}$，以此类推。

比如$y''-4y'+6y$，可以写作：$(D^2-4D+6)y$

■ “$\frac{1}{D}$”或者“D^{-1}”，对应求导的逆操作，即“$\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)dx$”（不需要加$C$）

比如$\frac{1}{D}e^{4x}=\frac{1}{4}e^{4x}$，$\frac{1}{D}\sin 3x=-\frac{1}{3}\cos 3x$，$\frac{1}{D^2}e^{5x}=\frac{1}{25}e^{5x}$

■ 分母是微分算子的多项式，作用于x的多项式函数，如下所示：

$$\frac{1}{b_0+b_1D+b_2D^2+\cdots}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)$$

可套用多项式除法进行运算，比如下题：

$$\frac{1}{1-3D+D^2}(5+2x+3x^2)$$

其中$\frac{1}{1-3D+D^2}$做如下除法（注意要把指数从低到高排列）：

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+3D+8D^2 \\
\hline
1-3D+D^2 & 1 \\
 & 1-3D+D^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 3D-D^2 \\
 & \quad 3D-9D^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 8D^2
\end{array}$$

所以：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-3D+D^2}(5+2x+3x^2)=(1+3D+8D^2)(5+2x+3x^2)\\
&=(5+2x+3x^2)+3(2+6x)+8(6)\\
&=59+20x+3x^2
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{D+5D^2}(3+2x^2)$$

$$\frac{1}{D+5D^2}=\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+5D}$$

其中：$\frac{1}{1+5D}=1-5D+25D^2-125D^3$，$\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+5D}=\frac{1}{D}-5+25D-125D^2$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\left(\frac{1}{D}-5+25D-125D^2\right)(3+2x^2)\\
&=\left(3x+\frac{2}{3}x^3\right)-5(3+2x^2)+25(4x)-125\times 4\\
&=-515+103x-10x^2+\frac{2}{3}x^3
\end{aligned}$$

【例题 8.5.1 基础题】求$4y''-y=x^3+x^2-x+1$的通解

首先，根据特征方程$4\lambda^2-1=0$求出齐次方程通解：$Y=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

第二步为求该非齐次方程的特解：

$$(4D^2-1)y^*=x^3+x^2-x+1$$

$$y^*=\frac{1}{4D^2-1}(x^3+x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{4D^2-1}=(-1-4D^2-16D^4)$$

$$y^*=-(x^3+x^2-x+1)-4(6x+2)=-x^3-x^2-23x-9$$

于是原方程的解为：

$$y=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-x^3-x^2-23x-9$$

关于二阶非齐次方程的右侧常分为如下几种类型：

(1) e^{kx}

(2) $\sin ax$, $\cos ax$

(3) $\mathrm{e}^{kx}v(x)$

我们接下来分类进行讲解处理方式方法。

纯指数函数

若$F(k)\neq 0$，$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{kx}=\frac{1}{F(k)}\mathrm{e}^{kx}$；

若$F(k)=0$，$F'(k)\neq 0$，则$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{kx}=x\frac{1}{F'(k)}\mathrm{e}^{kx}$；

若$F'(k)=0$，$F''(k)\neq 0$，则$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{kx}=x^2\frac{1}{F''(k)}\mathrm{e}^{kx}$；

……依次类推。

【例题 8.5.2 基础题】求$3y''+2y'-y=\mathrm{e}^{-2x}$的特解

$$y^*=\frac{1}{3D^2+2D-1}\mathrm{e}^{-2x}=\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-2x}$$

【例题 8.5.3 基础题】求$y''+3y'-4y=\mathrm{e}^{x}$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2+3D-4}\mathrm{e}^{x}=x\frac{1}{2D+3}\mathrm{e}^{x}=\frac{x\mathrm{e}^{x}}{5}$$

【例题 8.5.4 基础题】求$y''+4y'-2y=5$的特解

$$y^*=5\frac{1}{D^2+4D-2}\mathrm{e}^{0x}=-\frac{5}{2}$$

纯三角函数

若$F(-a^2)\neq 0$，$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=\frac{1}{F(-a^2)}\sin ax$，$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=\frac{1}{F(-a^2)}\cos ax$；

若$F(-a^2)=0$，$F'(-a^2)\neq 0$，$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=x\cdot\frac{1}{F'(-a^2)}\sin ax$，$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=x\cdot\frac{1}{F'(-a^2)}\cos ax$。

【例题 8.5.5 基础题】求$y''+7y=\sin 2x$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2+7}\sin 2x=\frac{1}{(-4)+7}\sin 2x=\frac{\sin 2x}{3}$$

【例题 8.5.6 基础题】求$y''+y=\cos x$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2+1}\cos x=x\frac{1}{2D}\cos x=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{D}\cos x=\frac{x}{2}\sin x$$

【例题 8.5.7 基础题】求$y''+2y'-3y=\sin 3x$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2+2D-3}\sin 3x=\frac{1}{(-9)+2D-3}\sin 3x=\frac{1}{2D-12}\sin 3x$$
$$=\frac{2D+12}{4D^2-144}\sin 3x=-\frac{D+6}{90}\sin 3x=-\frac{3\cos 3x+6\sin 3x}{90}=-\frac{\cos 3x+2\sin 3x}{30}$$

混搭类型

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{kx}v(x)=\mathrm{e}^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)$$

【例题 8.5.8 基础题】求$y''-y'+y=\mathrm{e}^{2x}\cos 3x$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2-D+1}\mathrm{e}^{2x}\cos 3x=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-(D+2)+1}\cos 3x$$
$$=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D^2+3D+3}\cos 3x=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{3D-6}\cos 3x=\mathrm{e}^{2x}\frac{3D+6}{9D^2-36}\cos 3x$$
$$=\mathrm{e}^{2x}\frac{D+2}{-39}\cos 3x=\mathrm{e}^{2x}\frac{-3\sin 3x+2\cos 3x}{-39}$$

【例题 8.5.9 基础题】求$y''+2y'-y=\mathrm{e}^{x}(1+x^2)$的特解

$$y^*=\frac{1}{D^2+2D-1}\mathrm{e}^{x}(1+x^2)=\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)-1}(1+x^2)$$
$$=\mathrm{e}^{x}\frac{1}{D^2+4D+2}(1+x^2)=\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{2}-D+\frac{7}{4}D^2\right)(1+x^2)$$
$$=\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1+x^2}{2}-2x+\frac{7}{2}\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\frac{x^2}{2}-2x+4\right)$$

第9讲 中值理论与证明题专项

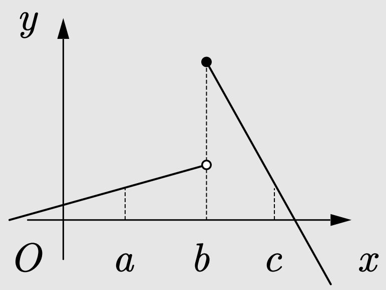
9.1 连续函数的性质

首先理解函数在区间连续上的概念：

函数$f(x)$在区间(a,b)上连续，则意味着对于任意的$\xi \in (a,b)$，都有$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$；

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，除了满足上述条件，还需要有$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，以及$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$，即在左端点$x=a$处实现“右连续”，在右端点$x=b$处实现“左连续”.

【例题 9.1.1 基础题】如下图所示，判断下列说法的正确与否：



(1) 函数$f(x)$在区间(a,c)上是连续的。
(2) 函数$f(x)$在区间(a,b)上是连续的。
(3) 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是连续的。
(4) 函数$f(x)$在区间(b,c)上是连续的。
(5) 函数$f(x)$在区间$[b,c]$上是连续的。
(6) 函数$y=\frac{1}{x}$在区间$[0,1]$上是连续的。
(7) 函数$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是连续的。

答案：(1)、(3)、(6)为错误的。

有界性与最大值最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定有最大值M和最小值m。

介值定理：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值：

$$f(a)=A, f(b)=B$$

则对于A与B之间的任意一个数C，在区间$[a,b]$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C(a\le \xi \le b)$

结合上述最值定理，介质定理也可解释为：对于任意的$\mu \in [m,M]$，存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi)=\mu$.

零点定理：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号（即$f(a)\cdot f(b) <$

0), 则在开区间(a,b)内至少有一点ξ, 使$f(\xi)=0$.

【例题 9.1.2 基础题】证明方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于 1 和 2 之间。

证明：设$f(x)=x^5-3x-1$，有$f(1)=-3<0$，有$f(2)=25>0$，根据零点定理可知$\exists\xi\in(1,2)$，使$f(\xi)=0$，ξ即为方程的根。

【例题 9.1.3 基础题】函数$f(x)$在区间$x\in[0,1]$上连续，且$f(0)=1$，$f(1)=0$，请证明：存在$\xi\in[0,1]$，使得$f(\xi)=\xi$

证明：设函数$F(x)=f(x)-x$，该函数在区间$x\in[0,1]$上连续，$F(0)=1$，$F(1)=-1$，根据零点定理可知，存在$\xi\in[0,1]$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

【例题 9.1.4 基础题】函数$f(x)$在区间$x\in[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，请证明：存在$\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，使得$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$

证明：设函数$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，则：

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)$$

根据$f(0)=f(1)$

$$g(0)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\right]^2\leq 0$$

根据连续函数零点定理可知，存在$\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，使得$g(\xi)=0$，即$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$。

【例题 9.1.5 基础题】设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且有$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，请证明：

（1）在$[a,b]$内至少存在一个ξ，使得：$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

（2）在$[a,b]$内至少存在一个ξ，使得：$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$

证明：

（1）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值分别为M、m，则有：

$$\frac{nm}{n}\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq\frac{nM}{n}$$

$$m\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq M$$

根据连续函数的介值定理可知，对于$m\sim M$的任意值，存在至少一个ξ，使得$f(\xi)$等于该值。本题得证。

（2）与上题证法相同。

【例题 9.1.6 基础题】设$f(x)$在区间$[1,3]$上连续，且有$f(1)+2f(2)+3f(3)=12$，请证明存在$\xi\in[1,3]$，使得：$f(\xi)=2$

证明：设函数$f(x)$在区间$[1,3]$上的最大值和最小值分别为M、m

$$6m<f(1)+2f(2)+3f(3)<6M$$

$$m < 2 < M$$

根据连续函数的介值定理可知，存在至少一个ξ，使得$f(\xi)$等于 2。本题得证。

【例题 9.1.7 基础题】证明以下命题：

（1）$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$至少有一个实根；

（2）任一最高次幂为奇数的代数方程$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} = 0\ (a_{2n+1} \neq 0)$，至少有一个实根。

（1）$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$，$f(-10) = -100000 + 10000 - 1000 + 100 - 10 < 0$，$f(10) = 100000 + 10000 + 1000 + 100 + 10 > 0$，根据零点定理可知，在-10 到 10 之间存在实根。

（2）从第（1）问的过程中可以看出，当x绝对值足够大时，$g(x)$的符号与$a_{2n+1}x^{2n+1}$相同。

因为：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n+1}x^{2n+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n+1}x^{2n+1}} = 1$，根据极限的保号性，可知存在$M > 0$，使得当$|x| > M$时，$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}$与$a_{2n+1}x^{2n+1}$同号。而后者分别在$x \to +\infty$和$x \to -\infty$时呈现一正一负的无穷大，根据零点定理可知，该函数在实数域上至少存在一个根。

9.2 不等式的基本证明思路

单调性的应用

【例题 9.2.1 基础题】证明当$x>0$时，$2-\frac{\mathrm{e}}{x}\leq \ln x\leq \frac{x}{\mathrm{e}}$

证明：$f(x) = \ln x + \frac{\mathrm{e}}{x} - 2$，则$f'(x) = \frac{x-\mathrm{e}}{x^2}$，得出极小值为$f(\mathrm{e}) = 0$，由此可得$2 - \frac{e}{x} \leq \ln x$

同理，设$g(x) = \ln x - \frac{x}{\mathrm{e}}$，则$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}}$，得到极大值为$g(\mathrm{e}) = 0$，由此可得$\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$

【例题 9.2.2 基础题】证明：当$x>0$时，$\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2} + x + 1$

答案：$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$，$f'(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$，$f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$

由于$f''(x) > 0$，$f'(0) = 0$，由此可知$x>0$时$f'(x) > 0$

由于$f'(x) > 0$，$f(0) = 0$，由此可知$x>0$时$f(x) > 0$

原式得证。

【例题 9.2.3 基础题】证明不等式$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geq x^2 + 2$（$x \in R$）

证明：设函数$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2 - 2$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x$$

有$f'(0) = 0$，为判断$x = 0$是否为极值点，进而求二阶导数

$$f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2$$

根据基本不等式，$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geq 2$，因此$f''(x)\geq 0$，$f'(x)$在实数域上递增，又有$f'(0)=0$，所以：

当$x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$

$f(x)$在$x=0$处左减右增，$x=0$是唯一的极小值点，所以也是最小值，$f(0)=0$，所以：

$$f(x)\geq 0$$

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geq x^2+2$$

【例题 9.2.4 基础题】证明：$\ln(1+\mathrm{e}^x)-x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

答案：令$f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)-x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$，

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-1+\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\frac{-1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}<0$$

则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递减。而在正无穷远处，有：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^x)-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}=0,$$

所以$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f(x)>0$，即$(1+\mathrm{e}^x)-x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$

以动治静

在面对常数的不等式的判别或证明，可以将常数改为变量x，然后使用函数单调性进行判断。比如下面两题。

【例题 9.2.5 基础题】已知$a=\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{e})$，$b=\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$，$c=\dfrac{\ln 5}{5}+1$，则$a,b,c$的大小关系为：

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

答案：C

解析：根据变形：

$$a=\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{e})=\frac{1}{2}\ln 2+1$$

$$b=\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln\mathrm{e}+1$$

$$c=\frac{\ln 5}{5}+1=\frac{1}{5}\ln 5+1$$

设函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$，则有：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当$0<x<\mathrm{e}$时，$f(x)$单调递增，当$x>\mathrm{e}$时，$f(x)$单调递减。所以$f(\mathrm{e})>f(2),f(\mathrm{e})>f(5)$。而

$f(5)-f(2)=\left(\dfrac{1}{5}\ln 5+1\right)-\left(\dfrac{1}{2}\ln 2+1\right)=\dfrac{2\ln 5-5\ln 2}{10}=\dfrac{\ln\frac{25}{32}}{10}<0$，所以$c<a$。

【例题 9.2.6 中等题】设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，并且$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，请证明：

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geq \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明：设函数$F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

设$G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，$G'(x)=2f(x)-2f(x)\cdot f'(x)=2f(x)(1-f'(x))$

由于$0<f'(x)$，可知$f(x)>f(0)=0$；由于$f'(x)<1$，可知$\big(1-f'(x)\big)>0$

于是$G'(x)>0$，$G(x)>G(0)=0$，进而$F'(x)>0$，可得$F(x)>F(0)=0.$

原式得证。

凹凸性的应用

【例题 9.2.7 基础题】证明以下不等式：

（1）当$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$时，$\sin x\geq\frac{2}{\pi}x$

（2）$a>0$，证明$\frac{\arctan 3a+\arctan a}{2}<\arctan 2a$

证明：（1）设函数$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，有$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y=0$是函数在 0 到 1 区间内的割线方程。并且得到：$f''(x)=-\sin x\leq 0\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$，函数在该区间内属于凸函数，所以存在$f(x)\geq 0$。

（2）函数$f(x)=\arctan x$，可得$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，当$x>0$时有$f''(x)<0$，属于凸函数。根据凸函数性质，我们知道：

$$\frac{f(3a)+f(a)}{2}\leq f\left(\frac{3a+a}{2}\right)$$

原式得证。

【例题 9.2.8 拔高题】（2024 数学一/数学二/数学三 12 分）设函数$f(x)$具有 2 阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leq 1$，证明：

（1）当$x\in(0,1)$时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leq\frac{x(1-x)}{2}$

（2）$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leq\frac{1}{12}$

答案：（1）题目所证不等式可以写为：

$$-\frac{x(1-x)}{2}\leq f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\leq\frac{x(1-x)}{2}$$

首先证明左侧：设$g_1(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x+\frac{x(1-x)}{2}$，即需要证$g_1(x)\geq 0\ (0<x<1)$。

可求得：$g_1''(x)=f''(x)-1$，根据题目信息可知$|f''(x)|\leq 1$，则有$g_1''(x)\leq 0$，该函数属于凸函数。$g_1(0)=g_1(1)=0$，$y=0$即为函数$g_2(x)$在区间$x\in[0,1]$上的割线，利用凸函数性质可知：在$0<x<1$区间内，有$g_1(x)\geq 0$。

证明右侧不等式：设$g_2(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x-\frac{x(1-x)}{2}$，即需要证$g_2(x)\leq 0\ (0<x<1)$

$g_2''(x)=f''(x)+1$，根据题目信息可知$|f''(x)|\geq 1$，则有$g_2''(x)\geq 0$，该函数属于凹函数。$g_2(0)=g_2(1)=0$，$y=0$即为函数$g_2(x)$在区间$x\in[0,1]$上的割线，利用凹函数性质可知：在$0<x<1$区间内，有$g_1(x)\leq 0$。

综上所述，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leq\frac{x(1-x)}{2}$得证。

（2）由于（1）中已得到信息：

$-\frac{x(1-x)}{2}\leq f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\leq\frac{x(1-x)}{2}$，对该式左右两侧进行 0 到 1 区间的定积分计算，不难得出：

$$\int_0^1[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}$$

$$\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

所以可得：

$$-\frac{1}{12}\leq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\leq\frac{1}{12}$$

本题得证。

【例题 9.2.9 中等题】设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f''(x)>0$，请证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

答案：由于函数$f(x)$是凹函数，所以有不等式：

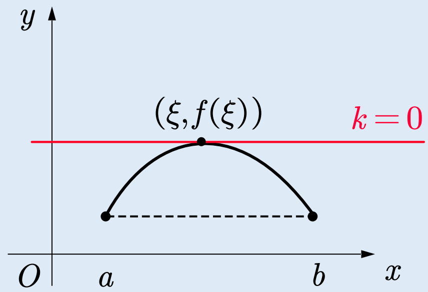
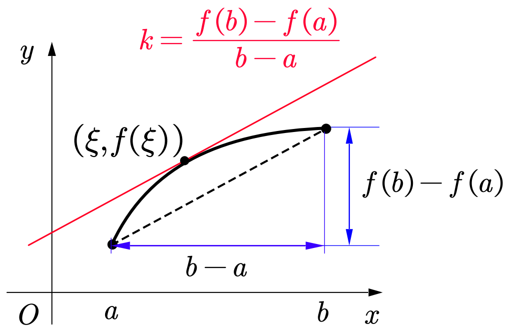
$$f(x)\leq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

而右侧定积分为：

$$\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$得证。

9.3 微分中值定理

前提条件	定理名称	定理主要内容
函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导。	罗尔定理	如果$f(a)=f(b)$，则在(a,b)中存在一个ξ，使得：$f'(\xi)=0$ 
	拉格朗日中值定理	在(a,b)中存在一个ξ，使得：$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 
	柯西中值定理	$f(x)$、$g(x)$均满足前提条件，则在(a,b)中存在一个ξ，使得：$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

罗尔定理

【例题 9.3.1 基础题】设$f(x)$在$[a,b]$上连续$(0<a<b)$，在(a,b)内可导，且$bf(a)-af(b)=0$. 请证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得：$f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

设$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，有$F'(x)=\frac{xf\prime(x)-f(x)}{x^2}$；

由于$F(a)=\frac{f(a)}{a},F(b)=\frac{f(b)}{b}$，由题意$bf(a)-af(b)=0$可知：$F(a)=F(b)$，由罗尔定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$，$f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

核心问题：如何证明一个表达式$f(x)$存在根，即$f(\xi)=0$

思路 1，零点定理：找到$f(a)\cdot f(b)<0$，即可得零点；

思路 2，罗尔定理：设$F(x)$，其导数中含有$f(x)$，找到$F(a)=F(b)$，则$F'(x)$有零点。

而罗尔定理解决证明题目的过程就在于两步：**第一步是找到合适的辅助函数，第二步是找到辅助函数同值点。其一，构造辅助函数的思路：**

- 写成相应的微分方程，获得通解中的“C”，其对应x的表达式就是辅助函数；

- 观察题目条件中提示给出的函数形式。

其二，找到辅助函数值相等的思路：

- 区间的两端点
- 区间内的两个零点
- 多次套用罗尔定理进行构造
- ……

【例题 9.3.2 基础题】设函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，试证明至少有一点存在$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)=0$.

第一步：设$g(x)=f(x)+f'(x)\tan x$；
第二步：设$G(x)=f(x)\cdot\sin x$，且有：
$G'(x)=f(x)\cos x+f'(x)\sin x=\cos x[f(x)+f'(x)\tan x]$；
第三步：由于$G(0)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，由罗尔定理可知，存在$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$G'(\xi)=0$，又有$\cos\xi\neq0$，所以$f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)=0$.

【例题 9.3.3 基础题】设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，试证明至少有一点存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

第一步：设$g(x)=f'(x)-f(x)$；
第二步：设$G(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，有$G'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$；
第三步：$G(a)=\mathrm{e}^{-a}f(a),G\left(\frac{a+b}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right),G(b)=\mathrm{e}^{-b}f(b)$，
则有：$G(a)\cdot G\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，$G(b)\cdot G\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$
则于区间$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$、$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$中分别存在$\xi_1$、$\xi_2$使得：$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，根据罗尔中值定理，则在区间$(\xi_1,\xi_2)$中存在$\xi$使得：$G'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$.

【例题 9.3.4 中等题】（2013 年 数学一/数学二 10 分）设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$，证明：
（Ⅰ）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$
（Ⅱ）存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$

证明：
（Ⅰ）因为$f(x)$为奇函数，所以$f(0)=0$。
【方法一】在$[0,1]$区间上使用拉格朗日中值定理，即可得出所证结论。
【方法二】构造辅助函数$G(x)=f(x)-x$，得到$G(0)=G(1)$，利用罗尔中值定理，也可得出结论。
（Ⅱ）设$F(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-1)$，则有$F'(x)=\mathrm{e}^x(f''(x)+f'(x)-1)$。根据（Ⅰ）中的结论，有$f'(\xi)=1$，其中$0<\xi<1$。而$f(x)$为奇函数，则$f'(x)$为偶函数，

$f'(-\xi)=1$。$F(\xi)=F(-\xi)=0$，根据罗尔定理可知存在$\eta\in(-\xi,\xi)$使得：

$F'(x)=0$，即$f''(\xi)+f'(\xi)-1=0$，原式得证。

，

【例题 9.3.5 基础题】设函数$f(x)$在区间$[a,b]$内存在 3 阶导数，且在该区间内由左至右存在四个不同的点ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4，它们取相同的函数值c，请证明在$[a,b]$内至少存在一个点η，使得$f'''(\eta)=0$

思路解析：

分别在$[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3],[\xi_3,\xi_4]$内使用罗尔定理说明一阶导数在三个区间内分别至少存在一个零点：

$$f'(\epsilon_1)=f'(\epsilon_2)=f'(\epsilon_3)=0$$

在$[\epsilon_1,\epsilon_2],[\epsilon_2,\epsilon_3]$内使用罗尔定理说明二阶导数在此两个区间内分别至少存在一个零点：

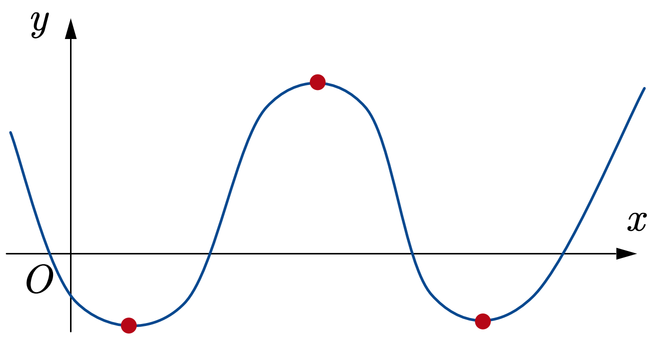
$$f''(\theta_1)=f''(\theta_2)=0$$

在$[\theta_1,\theta_2]$内使用罗尔定理说明三阶导数在此区间内至少存在一个零点：

$$f'''(\eta)=0$$

罗尔定理推论：如果函数$f(x)$在区间I上$f^{(n)}(x)\neq 0$，则$f(x)=0$在区间I上最多有n个实根。

从一幅图说起，假设函数$f(x)=0$存在 4 个实数根：



可见其导数$f'(x)$存在三个零点（图中红点）。而如果函数曲线要有更多的零点，就必然会导致其导数$f'(x)$对应也增加新的零点。可以得出一个推论：

连续可导的函数$f(x)=0$如果存在n个实数根，则其导数$f'(x)=0$有$(n-1)$个实根。

那么形成了向后传导的过程：

$f(x)=0$存在 4 个实数根→$f'(x)=0$存在 3 个实数根→$f''(x)=0$存在 2 个实数根→$f'''(x)=0$存在 1 个实数根→$f^{(4)}(x)\neq 0$

反之也可以形成推论：

$f^{(n)}(x)\neq 0\to f^{(n-1)}(x)=0$最多有 1 个实根→ $f^{(n-2)}(x)=0$最多有 2 个实根→ $f^{(n-3)}(x)=0$最多有 3 个实根……→ $f(x)=0$最多有n个实根

【例题 9.3.6 基础题】证明方程$2^x=x^2+1$有且仅有三个实数根

设函数$f(x)=2^x-x^2-1$，首先证明其存在的三个实根：

$$f(0)=0$$
$$f(1)=0$$
$$f(2)=-1<0$$

$$f(6)=27>0$$

于是$f(x)=0$存在三个实数根，分别为 0、1，以及一个介于 2 到 6 之间的实数根。

接下来需要验证该方程最多只有 3 个实数根。

$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$，$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3>0$

因此$f(x)=0$最多存在三个实数根。

拉格朗日中值定理

【例题 9.3.7 基础题】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{\arcsin(x+x^3)-\arcsin(x)}$

根据拉格朗日中值定理可知：$\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^{\epsilon_1}(b-a)(a<\epsilon_1<b)$，$\arcsin b-\arcsin a=\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon_2^2}}(b-a)(a<\epsilon_2<b)$题目中套用该形式可知：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{\arcsin(x+x^3)-\arcsin(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \epsilon_1\to 0\\ \epsilon_2\to 0}}\frac{\mathrm{e}^{\epsilon_1}(x-\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon_2^2}}(x^3)}=\lim_{\substack{\epsilon_1\to 0\\ \epsilon_2\to 0}}\frac{\mathrm{e}^{\epsilon_1}}{\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon_2^2}}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

【例题 9.3.8 基础题】$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$

根据拉格朗日中值定理可知：$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\theta^2}(b-a)(a<\theta<b)$

$$\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\theta^2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\theta^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

其中$\frac{1}{n+1}<\theta<\frac{1}{n}$，当$n\to\infty$时，$\theta\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0}}n^2\cdot\frac{1}{1+\theta^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0}}\frac{1}{1+\theta^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$$

【例题 9.3.9 基础题】设$0<a<b$，证明：$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$。

证明：【方法一】根据拉格朗日中值定理，可得：

$$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a),\ a<\xi<b$$

由于$a<\xi<b$，所以有$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，进而有：

$$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a}$$

所以原式得证。

【方法二】设函数$f_1(x)=\ln x-\ln a-1+\dfrac{a}{x}$，$f_2(x)=\dfrac{b}{x}-1-\ln x+\ln a$，本题需要证明的是，当$x>a$时恒有：$f_1(x)>0, f_2(x)>0$. 通过导数判断单调性即可方便求证，此处略去这个过程。

【例题 9.3.10 基础题】设$\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

证明：令$f(x)=\ln^2 x$，$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$。由拉格朗日定理，可得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=f(b)-f(a)=(b-a)\frac{2\ln\xi}{\xi},\xi\in(a,b)$$

设函数$g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，则有$g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，当$x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$时，$g'(x)<0$，

$g(x)$在该区间单调递减，所以$\xi<\mathrm{e}^2, g(\xi)>g(\mathrm{e}^2)$.

所以$\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{2\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}$，即$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$。

拉格朗日中值定理的抽象函数证明：此类问题的特点与解题核心

（1）所证结论中涉及双中值符号（比如ξ,μ）；

（2）解题的关键在于找到合适的区间套用拉格朗日等式，再进一步处理为题目欲证结论；

（3）题目常常需要在多个区间上使用拉格朗日等式，划分区间的常用节点有：中点，极值点，题目信息提示点。**重要的是要根据题目欲证的结论反推区间节点。**

【例题 9.3.11 中等题】设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=1, f(0)=0$，证明存在不同的两点ξ,μ属于$(0,1)$，使得$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\mu)}=2$

证明：根据连续函数介值定理可知，存在$m\in(0,1)$，使得$f(m)=\frac{1}{2}$，在$(0,m)$以及$(m,1)$区间上分别使用拉格朗日中值定理可知：

$$\frac{f(m)-f(0)}{m}=\frac{1}{2m}=f'(\xi)\ (0<\xi<m)$$
$$\frac{f(1)-f(m)}{1-m}=\frac{1}{2(1-m)}=f'(\mu)\ (m<\mu<1)$$
$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\mu)}=2$$

【例题 9.3.12 中等题】设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}$，证明：存在不同的两点ξ,μ属于$(0,1)$，使得$f'(\xi)+f'(\mu)=1$

证明：在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$以及$\left[\frac{1}{2},1\right]$上分别使用拉格朗日中值定理，可得：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=\frac{1}{2}f'(\xi)\ \left(0<\xi<\frac{1}{2}\right)$$

$$f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'(\mu)\ \left(\frac{1}{2}<\mu<1\right)$$

两式相加可得：

$$f'(\xi)+f'(\mu)=2[f(1)-f(0)]=1$$

【例题 9.3.13 中等题】设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）存在$c\in(0,1)$，使$f(c)=1-c$；

（2）存在两个不同的点$\xi,\eta\in(0,1)$，使$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证明：（1）令$F(x)=f(x)-1+x$，则$F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，

且$F(x)$在$[0,1]$上连续，由连续函数零点定理知，存在$c\in(0,1)$，使$f(c)=1-c$

（2）对$f(x)$分别在区间$[0,c]$和$[c,1]$上用 Lagrange 定理，存在$\xi\in[0,c]$和$\eta\in[c,1]$，使得：

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c$$
$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$$

又$f(0)=0,f(1)=1,f(c)=1-c$，则

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{c}{1-c}=1$$

第 2 问的思路辨析：

题目中出现了两个不同的点ξ,η，常常意味着需要把$[0,1]$分为两个区间，在两个区间分别套用 Lagrange 定理。我们假设分段节点为d，即$[0,d]$和$[d,1]$两个区间，对应有拉格朗日中值定理：

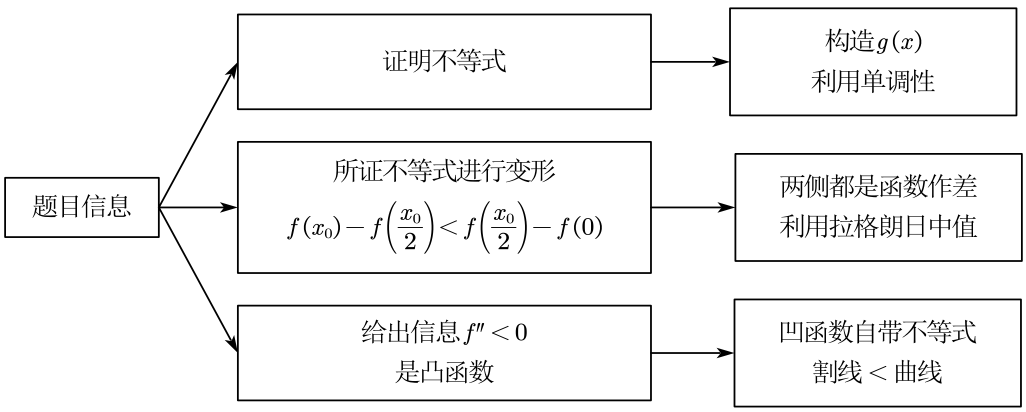
$$f(d)-f(0)=f'(\xi)d,(\xi)=\frac{f(d)}{d}$$
$$f(1)-f(d)=f'(\eta)(1-d),f'(\eta)=\frac{1-f(d)}{1-d}$$

选择d，使

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(d)}{d}\cdot\frac{1-f(d)}{1-d}=1$$

【例题 9.3.14 中等题】设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任意的$x_0\in[0,1]$，使得$f(x_0)<2f\left(\frac{x_0}{2}\right)$。

证明：



【方法一：函数的单调性】令 $g(x)=f(x)-2f(x/2)$，定义域为 $[0,1]$。函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导。

$$g(0) = f(0) - 2f(0/2) = f(0) - 2f(0) = 0 - 2(0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

因为在 $(0,1)$ 上 $f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递减。

对于 $x \in (0,1)$，$f'(x/2) > f'(x)$。所以，$g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x}{2}\right) < 0$。

因此，对于任意 $x_0 \in (0,1]$，我们有 $g(x_0) < g(0)$。将 $g(x)$ 的定义和 $g(0) = 0$ 代入：

$$f(x_0) - 2f\left(\frac{x_0}{2}\right) < 0$$

【方法二：拉格朗日中值定理】在区间$\left[0, \frac{x_0}{2}\right]$以及$\left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$上分别使用拉格朗日中值定理，可得：

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) - f(0) = f'(\xi_1)\frac{x_0}{2} \left(0 < \xi_1 < \frac{x_0}{2}\right)$$

$$f(x_0) - f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f'(\xi_2)\frac{x_0}{2} \left(\frac{x_0}{2} < \xi_2 < x_0\right)$$

令②式减去①式，并且代入$f(0) = 0$，可得：

$$f(x_0) - 2f\left(\frac{x_0}{2}\right) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]\frac{x_0}{2}$$

$f''(x) < 0$，可得$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0$，所以$f(x_0) - 2f\left(\frac{x_0}{2}\right) < 0$

【方法三：凹凸性】因为$f(x)$在$[0,1]$上连续且在$(0,1)$内$f''(x)<0$，所以$f(x)$在$[0,1]$上是严格凸函数。根据严格凸函数的定义，对于任意不同的两点$x_1, x_2 \in [0,1]$和任意$t \in (0,1)$，有：

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

取$t = 1/2$，则$1 - t = 1/2$。$t \in (0,1)$。代入凸函数定义：

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot x_0\right) > \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x_0)$$

即：

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_0)$$

$$f(x_0) < 2f\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

柯西中值定理

【例题 9.3.15 基础题】设$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，$0 < a < b$，试证：存在$\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (a^2 + ab + b^2)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}.$$

证明：

欲证$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)(a^2+ab+b^2)}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$，即$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$

可令$g(x)=x^3$，则$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0,x>0$.

由柯西中值定理知存在$\xi\in(a,b)$，使：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\text{即}\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

也即$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$.

【例题 9.3.16 基础题】设a,b为正数，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\frac{ae^b-be^a}{a-b}=e^\xi(1-\xi)$.

$$\frac{ae^b-be^a}{a-b}=\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

设函数$f(x)=\frac{e^x}{x},g(x)=\frac{1}{x}$，根据柯西中值定理可知：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{e^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=e^\xi(1-\xi)$$

9.4 拉格朗日余项

【例题 9.4.1 中等题】设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\max f(x)=2$，试证存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\leqslant -16$.

证明：假设$f(c)=2$，根据极值点定理可知$f'(c)=0$.

由 Taylor 定理知，$\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,\xi\in(x,c)or(c,x).$$

（1）若$0<c\leqslant\frac{1}{2}$　在$f(x)=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$中令$x=0$得：

$$0=f(0)=2+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2(0<\xi_1<c)$$

$$f''(\xi_1)=\frac{-4}{c^2}\leqslant\frac{-4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-16$$

（2）若$\frac{1}{2}<c\leqslant 1$　在$f(x)=2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$中令$x=1$得：

$$0=f(1)=2+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2(c<\xi_2<1)$$

$$f''(\xi_2)=\frac{-4}{c^2}\leqslant\frac{-4}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=-16$$

【例题 9.4.2 拔高题】（2023 数学一/二/三 12 分）设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有二阶连续导数，证明：

（1）若$f(0)=0$，则至少存在一点$\xi\in(-a,a)$，使得

$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

（2）若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则至少存在一点$\eta\in(-a,a)$，使得

$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$

答案：（1）$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\alpha)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\alpha)}{2}x^2$，

分别令$x=a$和$x=-a$得

$$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\alpha_1)}{2}a^2,0<\alpha_1<a$$

$$f(-a)=-f'(0)a+\frac{f''(\alpha_2)}{2}a^2,-a<\alpha_2<0$$

两式相加得$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)]$

又由于$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，故$f''(x)$在$[\alpha_1,\alpha_2]$上必有最大值M，最小值m

$$m\leq\frac{f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)}{2}\leq M$$

由介值定理知，存在$\xi\in[\alpha_1,\alpha_2]\subset(-a,a)$，$f''(\xi)=\frac{f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)}{2}$，故$f''(\xi)=$

$\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$

（2）设函数在$b\in(-a,a)$取得极值，则有$f'(b)=0$，将函数在$x=b$处展开可知：

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\beta)}{2}(x-b)^2=f(b)+\frac{f''(\beta)}{2}(x-b)^2$$

代入$x=a$和$x=-a$：

$$f(a)=f(b)+\frac{f''(\beta_1)}{2}(a-b)^2,\beta_1\in(b,a)$$

$$f(-a)=f(b)+\frac{f''(\beta_2)}{2}(a+b)^2,\beta_2\in(-a,b)$$

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\beta_1)}{2}(a-b)^2-\frac{f''(\beta_2)}{2}(a+b)^2\right|$$

$$\left|\frac{f''(\beta_1)}{2}(a-b)^2-\frac{f''(\beta_2)}{2}(a+b)^2\right|\leq\frac{|f''(\beta_1)|}{2}(a-b)^2+\frac{|f''(\beta_2)|}{2}(a+b)^2$$

设$|f''(\eta)|=\max\{|f''(\beta_1)|,|f''(\beta_2)|\}$

$$\frac{|f''(\beta_1)|}{2}(a-b)^2+\frac{|f''(\beta_2)|}{2}(a+b)^2\leq\frac{|f''(\eta)|}{2}[(a-b)^2+(a+b)^2]$$

$$\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2}\leq 2a^2$$

进而有$\frac{|f''(\eta)|}{2}[(a-b)^2+(a+b)^2]\le 2a^2|f''(\eta)|$，原式得证。

【例题 9.4.3 拔高题】请证明不等式$\left|\frac{\sin b-\sin a}{b-a}-\cos a\right|\le\left|\frac{b-a}{2}\right|$

解：将$f(x)=\sin x$在$x=a$处一阶展开并保留拉格朗日余项，可得：

$$\sin x=\sin a+\cos a\,(x-a)-\frac{\sin\xi}{2}(x-a)^2$$

其中ξ介于x与a之间。利用上式，代入$x=b$可得：

$$\sin b=\sin a+\cos a\,(b-a)-\frac{\sin\xi}{2}(b-a)^2$$

于是有：$\left|\frac{\sin b-\sin a}{b-a}-\cos a\right|=\left|-\frac{\sin\xi}{2}(b-a)\right|\le\left|\frac{b-a}{2}\right|$

【例题 9.4.4 拔高题】（2022 年 数学一/数学二 12 分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有 2 阶连续导数．证明：$f''(x)\geqslant 0$的充分必要条件是：对不同的实数a,b，都有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明：不妨设定$b>a$，首先证明<u>必要性</u>（即根据$f''(x)\geqslant 0$可得出不等式）。

根据泰勒公式，得：

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中ξ介于x与$\frac{a+b}{2}$之间。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

如有$f''(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\geq 0$，所以

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

接下来证明充分性（即根据不等式可得出$f''(x)\geqslant 0$）：利用反证法。假设存在一处$x=\eta$处$f''(\eta)<0$，且满足任意的不同实数a,b，使得

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

由于二阶导数是连续的，所以必然存在一个$x=\eta$的邻域$(\eta-\delta,\eta+\delta)$使得在该区间内$f''(x)<0$。取：

$$\eta-\delta<a<b<\eta+\delta$$

则此时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

9.5 积分中值定理

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在积分区间$[a,b]$上必然存在一点ξ，使得：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot(b-a)$$

【例题 9.5.1 中等题】设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f'(x)<0$，求证：$\forall q\in[0,1]$，有：

$$\int_0^q f(x)\mathrm{d}x\geqslant q\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明：

$\displaystyle\int_0^q f(x)\mathrm{d}x-q\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^q f(x)\mathrm{d}x-q\left(\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x+\int_q^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$

$\displaystyle=(1-q)\int_0^q f(x)\mathrm{d}x-q\int_q^1 f(x)\mathrm{d}x=(1-q)qf(\xi_1)-(1-q)qf(\xi_2)$

$=(1-q)q\big(f(\xi_1)-f(\xi_2)\big)$

其中$\xi_1\in[0,q],\xi_2\in[q,1]$，而$f'(x)<0$，于是：$\big(f(\xi_1)-f(\xi_2)\big)>0$，因此

$\int_0^q f(x)\mathrm{d}x\geqslant q\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

【例题 9.5.2 基础题】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\mathrm{arctan}t\mathrm{d}t$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\mathrm{arctan}t\mathrm{d}t=\lim_{\xi\to+\infty}(x+1-x)\mathrm{arctan}\xi=\frac{\pi}{2}$$

【例题 9.5.3 中等题】已知函数$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上可导，且

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明存在$\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$.

证明：记$F(x)=f(x)\cos x$，根据积分中值定理，存在$\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\frac{\pi}{2}F(\eta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x=0$$

因此$F(\eta)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。根据罗尔定理，存在$\xi\in\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=\cos\xi\,(f'(\xi)-f(\xi)\tan\xi)=0$$

而$\cos\xi\neq 0$，所以

$$f'(\xi)-f(\xi)\tan\xi=0$$