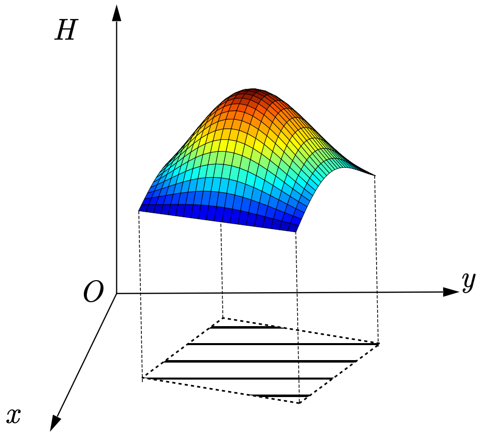
高等数学（下册） 考研数学二 基础精讲课 讲义

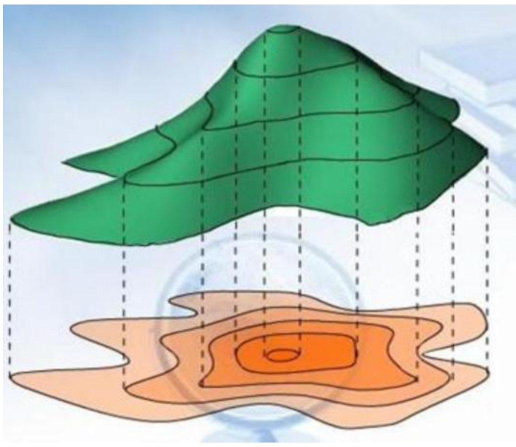
第10讲 多元函数微分学

10.1 多元函数基本概念

多元函数：什么是多元函数？为什么要研究多元函数？多元函数的图像是什么样子？

地面的海拔高度H是关于经度x和纬度y的一个二元函数$H(x,y)$，不同的坐标对应不同的海拔：





【例题 10.1.1 基础题】求出下列多元函数的定义域：

（1）$z=\ln(y^2-2x+1)$

（2）$z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$

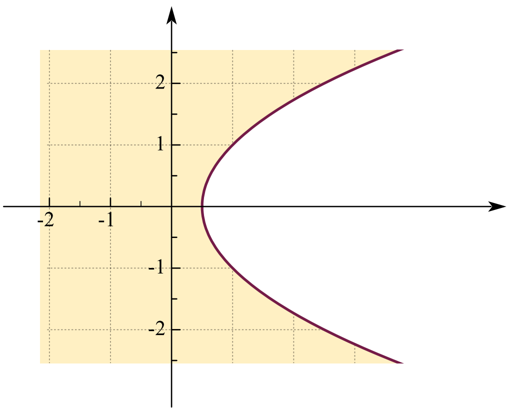
（3）$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

解：

（1）

$$y^2-2x+1>0,x<\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2},\left\{(x,y)|x<\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right\}$$

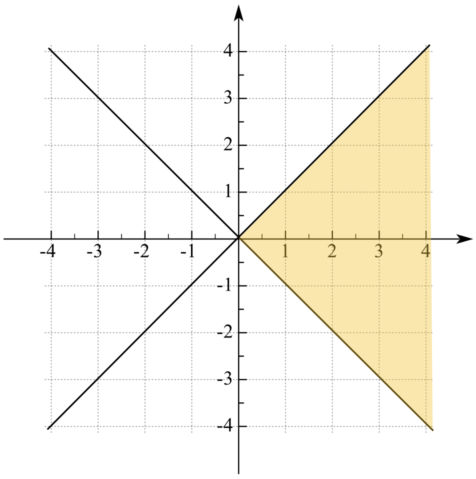
在坐标面上表示出对应区域如图所示：



（2）

$$\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases},\{(x,y)|x+y>0,x-y>0\}$$

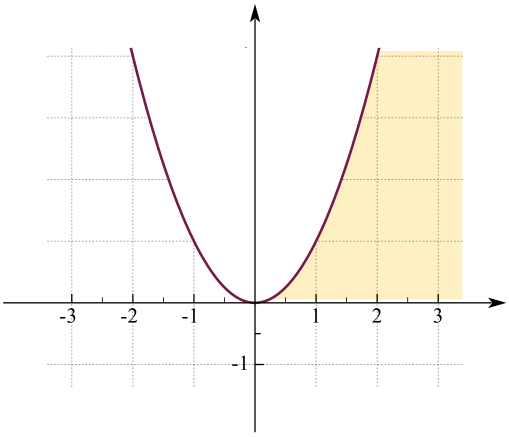
在坐标面上标记对应区域为：



（3）

$$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ x-\sqrt{y} \geqslant 0 \end{cases}, \{(x,y)|y \geqslant 0, x \geqslant \sqrt{y}\}$$

在坐标面上标记对应区域为：



二维平面中的邻域：设$P_0(x_0,y_0)$是xOy平面上的一个点，δ是某一个正数.与点$P_0(x_0,y_0)$距离小于δ的点$P(x,y)$的全体，称为点P_0的δ邻域，记作$U(P_0,\delta)$.也就是：

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

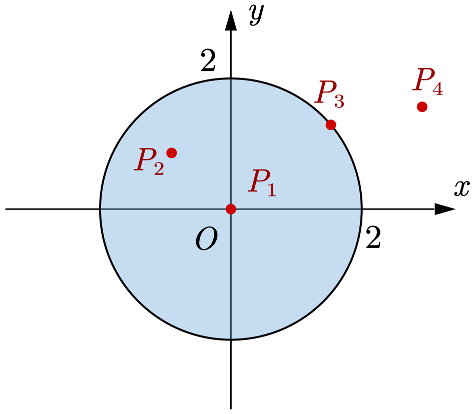
点P_0的去心δ邻域，记作$\bar{U}(P_0,\delta)$.也就是：

$$\bar{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

点与点集之间的关系：设平面中存在点集E，以及一个点P，则两者之间关系必为以下三种关系之一：

- **内点：** 点P**存在某个邻域**$U(P)$满足$U(P)\subset E$，则点P为E的内点；
- **外点：** 点P**存在某个邻域**$U(P)$满足$U(P)\cap E=\varnothing$，则点P为E的外点；
- **边界点：** 点P的**任意一个邻域**既含有属于E的点，也含有不属于E的点，则点P为E的边界点。

E的全体边界点组成E的边界，记为∂E.外点、边界点还可以统一定义为聚点：
聚点： 点P的**任意一个去心邻域**含有属于E的点，点P即为E的聚点. 注意点集的聚点不一定属于该点集.



$E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 4\}$

P_1：边界点，聚点

P_2：内点，聚点

P_3：边界点，聚点

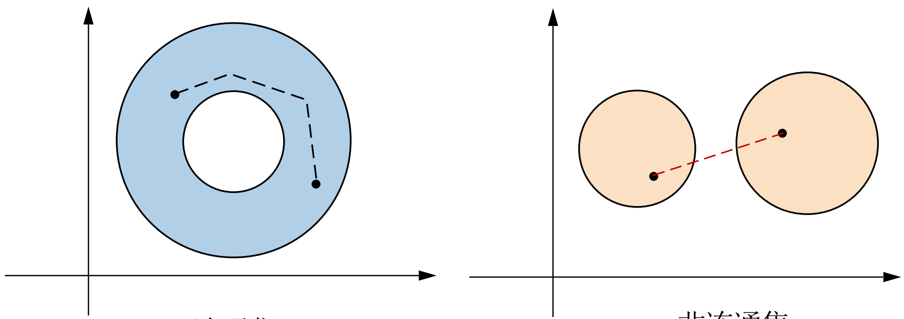
P_4：外点

点集类型：

开集：点集E的所有点都是它的内点，则点集E为开集，例如$E=\{(x,y)|0<x^2+y^2<4\}$；

闭集：点集E的边界$\partial E\subset E$，则点集E为闭集，例如$E=\{(x,y)|0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$。

连通集：点集E内任何两点都可以用折线连起来，且折线上的点都在E内，那么E为连通集：



连通集　　　　非连通集

10.2 多元函数的极限

设二元函数$f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$是D的聚点，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当点$P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$，都有：

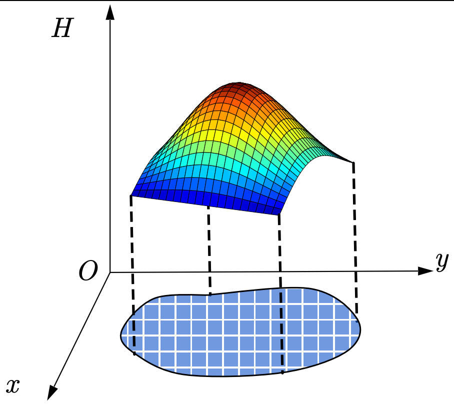
$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

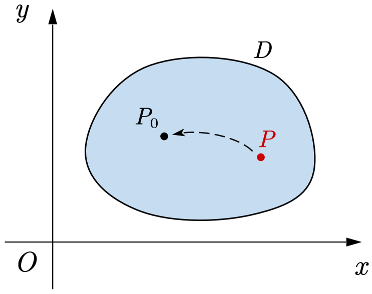
那么就称常数A为函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限，记为：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

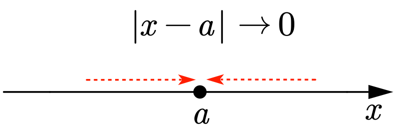
多元函数极限概念解读：

①在定义域D上有两点$P_0(x_0,y_0)$和$P(x,y)$，其中P_0是固定的一个点，P是在不断移动的。当P和P_0越来越接近时，P点处对应的函数值越来越接近数字A.

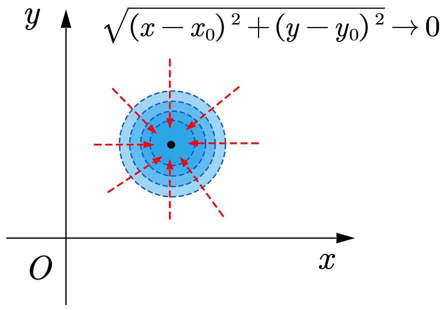




②在一元函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$中，$x\to a$的过程，在一维数轴上只有两种方向（即$x\to a^+$与$x\to a^-$）；而在平面空间上，P向P_0接近时，两点距离$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$越来越小，这个过程的路径、方向有无数种：



一元函数：$x\to a$



二元函数：$(x,y)\to(x_0,y_0)$

二元函数极限与一元函数极限运算有着相近的运算规则，

【例题 10.2.1 基础题】求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}$

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x+x^2y}}$

解：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0\times1}{1^2+0^2}=1$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln2$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2^2-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})}=-\frac{1}{4}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}x=2$

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}}=0$

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x+x^2y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{x+x^2y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}e^{\frac{\frac{1}{2}}{1+xy}}=e^{\frac{1}{2}}$

【例题 10.2.2 基础题】判断以下极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{x^3+y}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y^2}$

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解：

（1）方法一：令$y=kx$，当$P(x,y)$沿着$y=kx$的方向趋于$(0,0)$时：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

这反映出，从不同的方向趋于$(0,0)$会得到不同的极限值。所以该极限不存在。

方法二：令$\begin{cases}y=\rho\sin\theta\\x=\rho\cos\theta\end{cases}$，则有：

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta$，从不同的方向趋于$(0,0)$会得到不同的极限值。所以该极限不存在。

（2）方法一：令$y=kx^2$，原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$。该极限不存在。

方法二：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{(x^2)^2+y^2}$，令$\begin{cases}y=\rho\sin\theta\\x^2=\rho\cos\theta\end{cases}$，则有：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2)^2+y^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta$$

该极限不存在。

（3）令$y=-x^3+x^4$，代入可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y}{x^3+y}\overset{y=-x^3+x^4}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^3+x^4}{x^4}=\infty$$

沿着这条指定的路径靠近时，得到的极限结果为无穷大，所以该极限不存在。

（4）令$x=-y^2+y^4$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y^2}\overset{x=-y^2+y^4}{=\!=\!=}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-y^3+y^5}{y^4}=\infty$

得到的极限结果为无穷大，所以该极限不存在。

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y$，而其中：$0\le\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\le 1$，有界变量与无穷小相乘，结果为无穷小，所以原式极限结果为 0.

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}y$，其中$-1\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$，有界变量与无穷小相乘，结果为无穷小，所以原式极限结果为 0.

总结：验证二元极限存在与否的常用方法

①绑定变量关系：常用于验证极限不存在。令$y=f(x)$（比如$y=kx$），如果该极限值会随着路径发生变化或者得出结果为无穷大，则说明极限不存在；

②极坐标代换：常用于验证极限不存在。令$\begin{cases} y=\rho\sin\theta \\ x=\rho\cos\theta \end{cases}$，如果最终极限的结果与$\theta$有关，则说明极限不存在；

③放缩法：常用于验证为 0，这一点在后续的全微分性质中常用，需要掌握比较扎实。

多元函数的连续性：设二元函数$f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$为D的聚点，且$P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则函数$f(x,y)$在P_0点处连续。

多元初等函数在它的定义域内是连续的。

【例题 10.2.3 基础题】请确定a的值，使函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{x^2+y^2}}-1} & x^2+y^2\neq 0\\ a & x^2+y^2=0\end{cases}$$

解：根据函数连续的条件，应使：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{x^2+y^2}}-1}=a$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{x^2+y^2}}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{2-\mathrm{e}^t}+1\right)}{1-\mathrm{e}^t}=-2$$

所以，$a = -2$.

【例题 10.2.4 基础题】设$f(x,y)$在点(0,0)处连续，并且有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\cos(x^2+y^2)-1}=2$$，则有：

A. $f(x,y)$在点(0,0)处取得极小值

B. $f(x,y)$在点(0,0)处取得极大值

C. $f(x,y)$在点(0,0)处没有极值

D. 无法确定$f(x,y)$在点(0,0)处是否为极值点

答案：$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\cos(x^2+y^2)-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}=2$，

根据多元函数连续性可知 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$

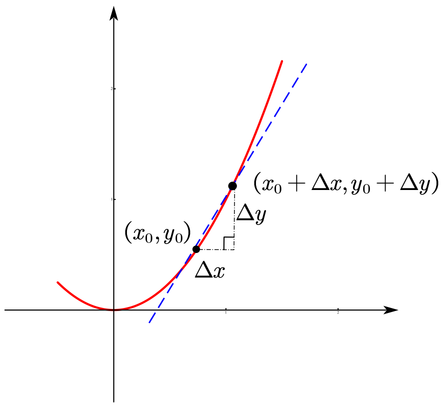
根据极限保号性，则可知在点(0,0)的某个去心邻域内存在$f(x,y)<0$，

综上所述可知，定$f(x,y)$在点(0,0)处的取值为 0 属于极大值。

10.3 导数相关概念

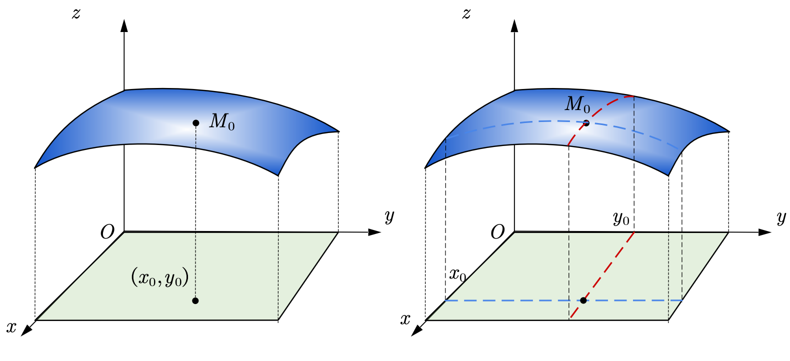
偏导数

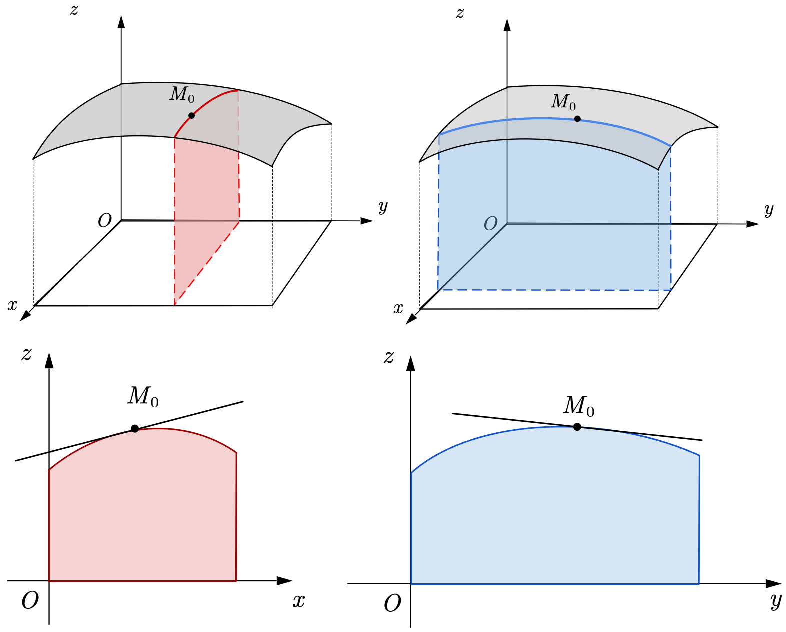
一元函数中的导数：导数反映出的是函数值随着自变量变化而变化的快慢。



$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

二元函数中的导数：设函数$z=f(x,y)$，其函数图像如下：





那么，函数$z=f(x,y)$的值随着x变化的情况记为$\frac{\partial z}{\partial x}$，即$z$对$x$的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

函数$z=f(x,y)$的值随着y变化的变化的情况记为$\frac{\partial z}{\partial y}$，即$z$对$y$的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

【例题 10.3.1 基础题】求$z=f(x,y)=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数.

解：

解法一：根据偏导数定义直接求解：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)2+2^2-(1^2+3\cdot 2+2^2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}8+\Delta x=8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1^2+3(2+\Delta y)+(2+\Delta y)^2-(1^2+3\times 2+2^2)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{7\Delta y+(\Delta y)^2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}7+\Delta y=7$$

解法二：利用一元函数求导方法进行求解：

在求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，仅需把$z=x^2+3xy+y^2$中的“$y$”当作常数，将式子看作关于$x$的一元函数，进而求导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+3xy+y^2)}{\partial x}=2x+3y，将x=1,y=2代入，得：\frac{\partial f}{\partial x}_{(1,2)}=8;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+3xy+y^2)}{\partial y}=3x+2y，将x=1,y=2代入，得：\frac{\partial f}{\partial y}_{(1,2)}=7.$$

【例题 10.3.2 基础题】求下列函数的偏导数

（1）$s=\frac{u^2+v^2}{uv}$

（2）$z=(1+xy)^y$

（3）$u=x^{\frac{y}{z}}$

（4）设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求$f_x'(x,1)$.

解：

（1）

$$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},\quad \frac{\partial s}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}$$

（2）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$$

$$z=(1+xy)^y=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\cdot\frac{\partial}{\partial y}[y\ln(1+xy)]=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\cdot\left[\frac{xy}{1+xy}+\ln(1+xy)\right]$$

（3）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

（4）由于求的是关于x的偏导，且取该偏导函数在$y=1$时的值，那么可以先将$y=1$代入$f(x,y)$中得到：$f(x,1)=x$，所以$f_x(x,1)=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1$.

【例题 10.3.3 基础题】（2023・数学三・5 分）已知函数$f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则（　）.

A. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$不存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$存在

B. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$不存在

C. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$均存在

D. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

解析：本题考查具体点偏导数的存在性，用定义处理

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 1|x|)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 1|x|}{x}$$

$$=\begin{cases}\sin 1, x\to 0^+\\ -\sin 1, x\to 0^-\end{cases}$$

故$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$不存在

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=1$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$存在，选 A

高阶偏导数：在多元函数$z=f(x,y)$中，其偏导函数$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$仍然属于多元函数，针对偏导函数继续求偏导，那么将会得到“二阶偏导数”：

（1）$\frac{\partial f}{\partial x}$（或$f_x'$）对$x$求偏导则记为$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$（或$f_{xx}''$），对$y$求偏导则记为$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$（或$f_{xy}''$）；

（2）$\frac{\partial f}{\partial y}$（或$f_y'$）对$y$求偏导则记为$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$（或$f_{yy}''$），对$x$求偏导则记为$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$（或$f_{yx}''$）.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$这种对于不同自变量所求的高阶偏导数，称为混合偏导数。

【例题 10.3.4 基础题】设函数$z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2,\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-16xy,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-16xy.$

定理：多元函数$z=f(x,y)$中如果存在二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$，且两者连续，则两者相等。

【例题 10.3.5 基础题】设$z=z(x,y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且$z(x,0)=1$，$z_y'(x,0)=x$，

则$z(x,y)=$ ______.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，两侧对$y$求原函数可知：

$$z'_y(x,y)=2y+\psi(x)$$

根据题目条件$z'_y(x,0)=x$可知：$\psi(x)=x$

$$z'_y(x,y)=2y+x$$

两侧再次对y求原函数可得：

$$z(x,y)=y^2+xy+\phi(x)$$

根据题目条件$z(x,0)=1$可知：$\phi(x)=1$，综上所述：

$$z(x,y)=y^2+xy+1$$

【例题 10.3.6 中等题】（2022 数学三 5 分）设函数$f(t)$连续，令

$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

答案：A

解析：

$$\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-y\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xf(x-y)-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)$$

概念辨析：多元函数存在偏导数（可偏导）与函数连续，两者之间不存在充分或必要条件关系。

一元函数：函数可导 ⇒ 函数连续

多元函数：函数可偏导 ⇎ 函数连续

对于多元函数的情况，可以通过以下两个例子进行说明：

（1）**偏导存在但不一定连续**，例如：函数$z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

根据前文我们已知该函数在$(0,0)$处不连续；

而在$(0,0)$处z对x的偏导为：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$；

同样地：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0$；

该函数在$(0,0)$处不连续，但具有偏导数。

其原因在于偏导数仅考虑变量沿着平行于x轴或者y轴方向的函数值的变化：

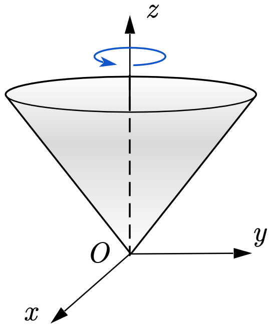
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

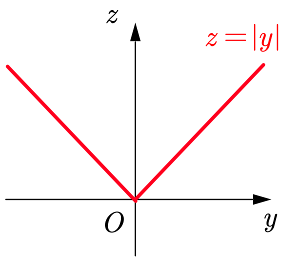
而多元函数的连续性意味着包含所有不同方向的逼近过程：

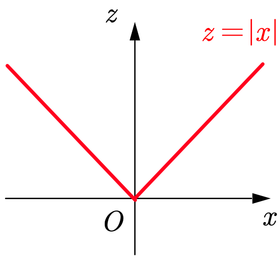
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

所以可以求偏导不意味着连续。

（2）**连续但偏导不一定存在**，例如：函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$







在$(0,0)$处，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，该函数连续；

而在$(0,0)$处求偏导，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$，偏导$\dfrac{\partial z}{\partial x}$不存在；

同理，偏导$\dfrac{\partial z}{\partial y}$不存在.

全微分

- 全微分公式：设多元函数$z=f(x,y)$，如果其满足可微的条件，则对应的全微分公式如下：

$$\mathrm{d}z=f_x'(x,y)\cdot \mathrm{d}x+f_y'(x,y)\cdot \mathrm{d}y$$

- 多元函数可微的直接判定标准：函数的全增量Δz与全微分$\mathrm{d}z$之间的“误差”是关于$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$的高阶无穷小，即满足下式

$$\lim_{\substack{\mathrm{d}x\to 0\\ \mathrm{d}y\to 0}}\frac{[f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)]-[f'_x(x,y)\cdot \mathrm{d}x+f'_y(x,y)\cdot \mathrm{d}y]}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}=0$$

（$\mathrm{d}x$也可写作为Δx，$\mathrm{d}y$也可写作为Δy）

请利用导数、偏导数的概念，近似计算数值$(2.002)^{3.001}$（令$\ln 2$近似取 0.7)

设$z = f(x,y) = x^y$，已知$f(2,3) = 8$，且$f_x' = yx^{y-1}, f_y' = x^y \ln x$，

$$f_x'(2,3) = 12, f_y'(2,3) = 8\ln 2 = 5.6$$

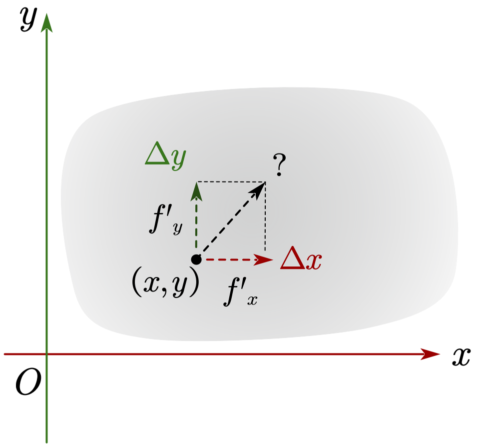
$$\Delta x = 0.002, \Delta y = 0.001$$

于是：

$$\Delta z \approx f_x'\Delta x + f_y'\Delta y = 12 \times 0.002 + 5.6 \times 0.001 = 0.0296$$

$$(2.002)^{3.001} \approx 2^3 + 0.0296 = 8.0296$$

通过图像理解全微分：



全微分的核心思想：用偏导数来估算函数值的实际变化量。

【例题 10.3.7 基础题】计算$z = \mathrm{e}^{xy}$在$(2,1)$处的全微分

$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y$，其中$\frac{\partial f}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy}$，将$x = 2, y = 1$代入，得：

$$\mathrm{d}z \,\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = \mathrm{e}^2\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^2\mathrm{d}y$$

【例题 10.3.8 基础题】求$z = 3x^2 + 2y^2$的全微分，并证明该二元函数是可微的。

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x, \frac{\partial z}{\partial y} = 4y$，于是$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = 6x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y$

证明该函数的可微性：

$\Delta z = 3(x + \mathrm{d}x)^2 + 2(y + \mathrm{d}y)^2 - (3x^2 + 2y^2) = 6x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y + 3(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2$

则$\mathrm{d}z$与Δz之间的误差为：$\Delta z - \mathrm{d}z = 3(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2$

我们需要验证该误差$\Delta z - \mathrm{d}z = 3(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2$与$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$相比是高阶无穷小，即证明：

$$\lim_{\substack{\mathrm{d}x\to 0\\ \mathrm{d}y\to 0}} \frac{3(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}} = 0$$

而实际上：

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{3(dx)^2+2(dy)^2}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2+2[(dx)^2+(dy)^2]}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}+\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$$

$$0\le\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}\le\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2}{|dx|}$$

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{(dx)^2}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}=0$$

因此函数可微的条件成立。

【例题 10.3.9 中等题】设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请判断该函数在(0,0)处：

（1） 是否连续；（2）是否存在偏导数；（3）是否可微。

（1） 连续的充要条件为：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

实际上：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$

因此该函数在(0,0)处连续。

（2） 存在偏导数的充要条件为以下两个极限存在：

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x},\quad f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

计算：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\arctan\frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2}}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\arctan\frac{1}{|\Delta y|}=\frac{\pi}{2}$$

由此确定偏导数存在，分别为 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=\dfrac{\pi}{2}$

（3） 在该点处可微的充要条件是有以下极限：

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{\Delta f-df}{\rho}=0$$

其中：

$$\Delta f=f(dx,dy)-f(0,0)=dy\arctan\frac{1}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$$

$$df=f'_x dx+f'_y dy=\frac{\pi}{2}dy$$

$$\rho=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

代入计算可知：

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{dy\arctan\frac{1}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}-\frac{\pi}{2}dy}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{dy}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

因此该点处可微。

【例题 10.3.10 中等题】（2024 数学二 5 分）已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy},xy\neq 0\\ 0,\quad xy=0\end{cases}$$，则在点 $(0,0)$ 处

A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 可微

B. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 不可微

C. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 可微

D. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 不可微

答案：C

解析：求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{xy}-\dfrac{(x^2+y^2)}{x^2y}\cos\dfrac{1}{xy}, xy\neq 0\\ 0\text{（使用极限定义算出）}, \quad xy=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{xy}-\dfrac{(x^2+y^2)}{xy^2}\cos\dfrac{1}{xy}, xy\neq 0\\ 0\text{（使用极限定义算出）}, \quad xy=0\end{cases}$$

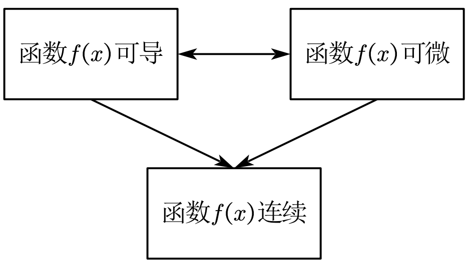
可判断得出两个偏导数在(0,0)处不连续。
接下来判断是否可微：

$$\lim_{\substack{\mathrm{d}x\to 0\\ \mathrm{d}y\to 0}}\frac{[f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)]-[f'_x(x,y)\cdot\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\cdot\mathrm{d}y]}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}$$

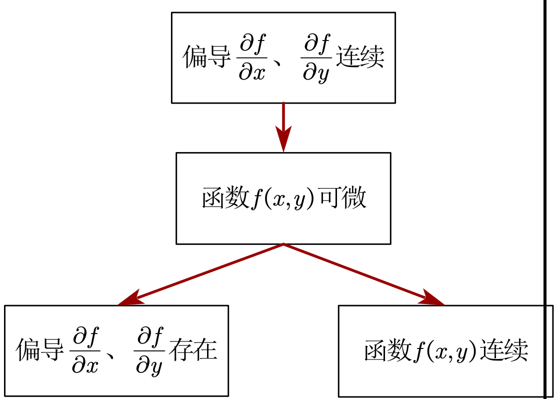
$$=\lim_{\substack{\mathrm{d}x\to 0\\ \mathrm{d}y\to 0}}\frac{[(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2]\sin\frac{1}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}=\lim_{\substack{\mathrm{d}x\to 0\\ \mathrm{d}y\to 0}}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\sin\frac{1}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=0$$

得出结论为可微。

- **多元函数可微的充分条件：若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，且 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 作为二元函数在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.**
- **多元函数可微的必要条件：若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在。**



一元函数



多元函数

【例题 10.3.11 基础题】（2023 数学三 5 分）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, $f(1,1)=\frac{\pi}{4}$，则 $f(\sqrt{3},3)=$_____.

答案：$\frac{\pi}{3}$

解析：由全微分的运算法则，知$f_x'(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}, f_y'(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

对x积分可得$f(x,y)=\int\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=-\arctan\frac{x}{y}+\varphi(y)$

对y求偏导得$f_y(x,y)=-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi'(y)=\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)$

故$\varphi'(y)=0, \varphi(y)=C$，由$f(1,1)=\frac{\pi}{4}$得$C=\frac{\pi}{2}$

$f(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}+\frac{\pi}{2}$，于是$f(\sqrt{3},3)=-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$

【例题 10.3.12 基础题】（2024 数学二 12 分）设函数$f(x,y)$可微且满足

$\mathrm{d}f(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)\mathrm{d}y$，$f(0,0)=2$. 求$f(x,y)$.

答案：根据题目信息可知：

$$f'_x=-2x\mathrm{e}^{-y}，f'_y=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$$

利用对x的偏导，求原函数得到f的表达式为：

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+\phi(y)$$

而求得对y的偏导，并与题目信息对应，可得：

$$x^2\mathrm{e}^{-y}+\phi'(y)=x^2\mathrm{e}^{-y}-(y+1)\mathrm{e}^{-y}$$

于是有：

$$\phi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^{-y}$$

所以

$$\phi(y)=(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$$

由此可知：

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$$

由根据$f(0,0)=2$，确定$C=0$。

$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}$ 。

多元复合函数求导

设函数$z=f(u,v)$，而u和v各自是关于x和y的二元函数：

$$u=u(x,y)$$
$$v=v(x,y)$$

它们之间的关系可以按照下图来理解：

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & v \arrow[r] \arrow[ur] & y \end{tikzcd}$$

变量z受到u和v的控制，而u和v各自受x,y的控制。求导的过程应当遵循链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

【例题 10.3.13 基础题】设$z=u^2+v^2$，而$u=x+y,v=x-y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：

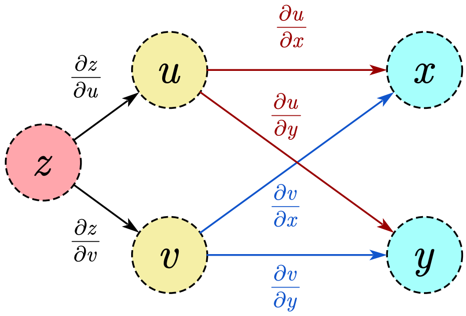
方法一：代入法

将$u=x+y,v=x-y$代入$z=u^2+v^2$中，得：

$$z=(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$$

于是：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\frac{\partial z}{\partial y}=4y$

方法二：多元函数求导链式法则



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u+2v=4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u-2v=4y$$

方法三：全微分形式的不变性

根据全微分计算原理可知：

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

根据题目可知，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u=2(x+y),\frac{\partial z}{\partial v}=2v=2(x-y)$$

并且

$$\mathrm{d}u=1\cdot\mathrm{d}x+1\cdot\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=1\cdot\mathrm{d}x-1\cdot\mathrm{d}y$$

代入上面的$\mathrm{d}z$表达式：

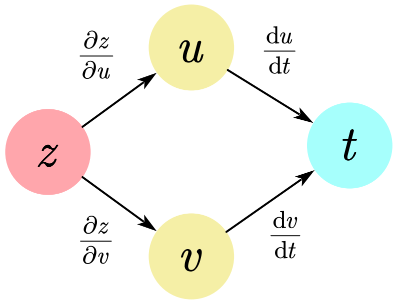
$$\mathrm{d}z=2(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+2(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=4x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y$$

根据**全微分形式的不变性**可知：

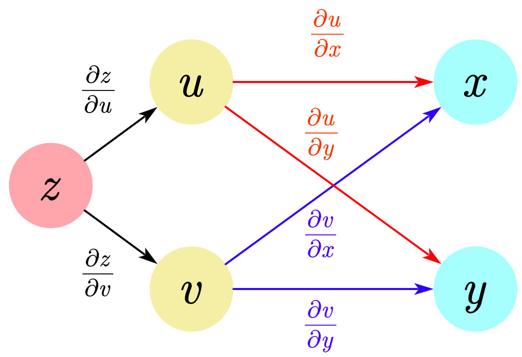
$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\frac{\partial z}{\partial y}=4y$$

单自变量时导数为**全导数**“$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}$”，多自变量时为**偏导数**“$\frac{\partial}{\partial}$”。

一元函数与多元函数复合	多元函数与多元函数复合
设$z=f(u,v)$，而$u=g(t)$，$v=h(t)$.	设$z=f(u,v)$，而$u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$.

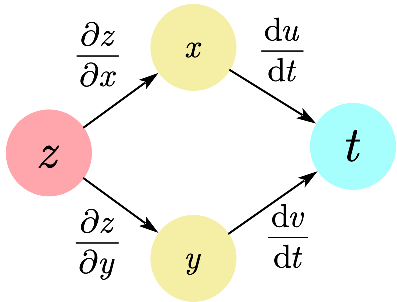


$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

【例题 10.3.14 基础题】设$z=\mathrm{e}^{x-2y}$，而$x=\sin t, y=t^3$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.



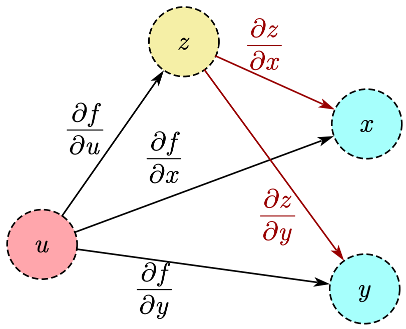
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cdot\cos t+(-2)\mathrm{e}^{x-2y}\cdot 3t^2=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$$

【例题 10.3.15 基础题】设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^{xyz}$，而$z=x^2\sin y$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$

错误解法：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xyz},\frac{\partial u}{\partial y}=xz\mathrm{e}^{xyz}$$

正确解法：



$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xyz}+xy\mathrm{e}^{xyz}\cdot 2x\sin y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xz\mathrm{e}^{xyz}+xy\mathrm{e}^{xyz}\cdot x^2\cos y$$

通过本题要注意区分$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial x}$，前者是考虑变量之间的全部关联，而后者是指$f$只对表达式中直接出现的$x$求导数。

需要掌握以下记号方法：

f_1'：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial f}{\partial u}$，意思即为$f$对括号中的第 1 个变量求偏导数；

f_2'：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial f}{\partial v}$，意思即为$f$对括号中的第 2 个变量求偏导数。

同理，对于二阶偏导则有：

f_{11}''：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$，意思即为$f_1'$对第 1 个变量再求一次偏导数；

f_{12}''：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$，意思即为$f_1'$对第 2 个变量再求一次偏导数；

f_{22}''：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$，意思即为$f_2'$对第 2 个变量再求一次偏导数；

f_{21}''：在$f(u,v)$中表示$\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$，意思即为$f_2'$对第 1 个变量再求一次偏导数。

【例题 10.3.16 基础题】设函数$z=f(x^2y,x-y)$，其中函数f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 2xy+f'_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial(f'_1)}{\partial x}\cdot 2xy+f'_1\cdot 2y+\frac{\partial(f'_2)}{\partial x}\\&=(f''_{11}\cdot 2xy+f''_{12})\cdot 2xy+f'_1\cdot 2y+(f''_{21}\cdot 2xy+f''_{22})\\&=4x^2y^2f''_{11}+4xyf''_{12}+f'_1\cdot 2y+f''_{22}\end{aligned}$$

【例题 10.3.17 基础题】设函数$z=y^3f(\frac{x}{y},\mathrm{e}^x)$，其中函数$f$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^3\left(\frac{1}{y}\cdot f'_1+\mathrm{e}^x f'_2\right)=y^2\cdot f'_1+y^3\mathrm{e}^x f'_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2yf'_1+y^2\cdot\frac{\partial(f'_1)}{\partial y}+3y^2\mathrm{e}^x f'_2+y^3\mathrm{e}^x\cdot\frac{\partial(f'_2)}{\partial y}\\&=2yf'_1+y^2f''_{11}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+3y^2\mathrm{e}^x f'_2+y^3\mathrm{e}^x f''_{21}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\&=2yf'_1-xf''_{11}+3y^2\mathrm{e}^x f'_2-xy\,\mathrm{e}^x f''_{21}\end{aligned}$$

【例题 10.3.18 中等题】设函数$z=f(u,v),u=a(x,y),v=b(x,y)$，其中三个函数都具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

首先求得两个一阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot a'_1+f'_2\cdot b'_1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot a'_2+f'_2\cdot b'_2$$

求二阶偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(f'_1\cdot a'_1+f'_2\cdot b'_1)\\&=a'_1\frac{\partial}{\partial x}(f'_1)+f'_1\frac{\partial}{\partial x}(a'_1)+b'_1\frac{\partial}{\partial x}(f'_2)+f'_2\frac{\partial}{\partial x}(b'_1)\\&=a'_1(f''_{11}a'_1+f''_{12}b'_1)+f'_1\cdot a'_{11}+b'_1(f''_{21}a'_1+f''_{22}b'_1)+f'_2\cdot b'_{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}(f'_1\cdot a'_2+f'_2\cdot b'_2)\\&=a'_2\frac{\partial}{\partial y}(f'_1)+f'_1\frac{\partial}{\partial y}(a'_2)+b'_2\frac{\partial}{\partial y}(f'_2)+f'_2\frac{\partial}{\partial y}(b'_2)\\&=a'_1(f''_{11}a'_2+f''_{12}b'_2)+f'_1\cdot a'_{22}+b'_2(f''_{21}a'_2+f''_{22}b'_2)+f'_2\cdot b'_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f'_1\cdot a'_1+f'_2\cdot b'_1)\\&=a'_1\frac{\partial}{\partial y}(f'_1)+f'_1\frac{\partial}{\partial y}(a'_1)+b'_1\frac{\partial}{\partial y}(f'_2)+f'_2\frac{\partial}{\partial y}(b'_1)\\&=a'_1(f''_{11}a'_2+f''_{12}b'_2)+f'_1\cdot a'_{12}+b'_1(f''_{21}a'_2+f''_{22}b'_2)+f'_2\cdot b'_{12}\end{aligned}$$

【例题 10.3.19 中等题】设$f(u)$具有二阶连续偏导数，并且$z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=z\mathrm{e}^{2x}$，求$f(u)$

$z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$，设$u=\mathrm{e}^x\sin y$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin yf'(u),\ \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos yf'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\sin yf'(u)+\mathrm{e}^{2x}\sin^2 yf''(u),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\mathrm{e}^x\sin yf'(u)+\mathrm{e}^{2x}\cos^2 yf''(u)$$

代入$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=z\mathrm{e}^{2x}$，可得：$f''(u)=f(u)$，解该微分方程可知：

$f(u)=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}$（其中$C_1,C_2$均为任意常数）

【例题 10.3.20 中等题】（2021 数学一/数学二/数学三 12 分）设函数$f(x,y)$可微，且$f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$

A. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

B. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

C. $\mathrm{d}y$.

D. $-\mathrm{d}y$.

答案：C

第一个条件中令$u = x + 1$和$v = \mathrm{e}^x$，对x求导：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot \mathrm{e}^x$$

右边的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(x+1)^2] = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1)$$

当$x = 0$时，$u = 1$和$v = 1$，代入得：

$$f_x(1,1) + f_y(1,1) = 1$$

第二个条件中令$u = x$和$v = x^2$，对x求导：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2x$$

右边的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2x^2 \ln x] = 4x\ln x + 2x$$

当$x = 1$时，$u = 1$和$v = 1$，代入得：

$$f_x(1,1) + 2f_y(1,1) = 2$$

解方程组：

$$f_x(1,1) + f_y(1,1) = 1$$
$$f_x(1,1) + 2f_y(1,1) = 2$$

解得：$f_x(1,1) = 0$，$f_y(1,1) = 1$。

全微分为：

$$\mathrm{d}f(1,1) = f_x(1,1)\,\mathrm{d}x + f_y(1,1)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y$$

【例题 10.3.21 基础题】设函数$z = f(2x - y, x + 2y) = x^2 + y^2$，求$f_1'(0,5)$以及$f_2'(0,5)$

方法一：逆向变换，破解$f(u,v)$

设$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$，则可解得：$\begin{cases} x = \dfrac{2u+v}{5} \\ y = \dfrac{-u+2v}{5} \end{cases}$，所以：

$$f(u,v) = \left(\frac{2u+v}{5}\right)^2 + \left(\frac{-u+2v}{5}\right)^2 = \frac{u^2+v^2}{5}$$

$$f_1'(u,v) = \frac{2}{5}u, f_2'(u,v) = \frac{2}{5}v$$

将$u = 0, v = 5$代入可得：

$$f_1'(0,5)=0, f_2'(0,5)=2$$

方法二：隔山打牛

根据$z=f(2x-y,x+2y)=x^2+y^2$直接左右对x和y求偏导，可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+f'_2=2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'_1+2f'_2=2y$$

把f_1'和f_2'当作两个未知数，即可解得：

$$f_1'(2x-y,x+2y)=\frac{4x-2y}{5}$$

$$f_2'(2x-y,x+2y)=\frac{2x+4y}{5}$$

令$2x-y=0,x+2y=5$，则得$x=1,y=2$，代入即可得到：

$$f_1'(0,5)=0$$

$$f_2'(0,5)=2$$

【例题 10.3.22 中等题】（2022 数学一 5 分）设函数$z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$f(u)$可导．若$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则

A. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=0$.

B. $f(1)=0,f'(1)=1$.

C. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=1$.

D. $f(1)=0,f'(1)=\frac{1}{2}$.

答案：D

解：根据函数表达式，得到偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right)$$

代入题目给出的方程可得：

$$x\left[yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y\left[xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]=y^2(\ln y-\ln x)$$

$$2xyf\left(\frac{y}{x}\right)=y^2\ln\frac{y}{x}$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，代入可得：$f(u)=\frac{u\ln u}{2}$，进一步求导数可得：$f'(u)=\frac{1+\ln u}{2}$.

【例题 10.3.23 拔高题】（2022 数学二 12 分）已知可微函数$f(u,v)$满足

$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$，且$f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（1）记$g(x,y)=f(x,y-x)$，求$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求$f(u,v)$的表达式。

答案：（1）

$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=f'_1(x,y-x)-f'_2(x,y-x)$，而根据题目信息可知：

$$f'_1(x,y-x)-f'_2(x,y-x)=2(2x-y)\mathrm{e}^{-y},$$

所以有：

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=(4x-2y)\mathrm{e}^{-y}.$$

（2）基于（1）中结果，可得到：

$$g(x,y)=(2x^2-2xy)\mathrm{e}^{-y}+\psi(y)$$

所以有：

$$f(x,y-x)=(2x^2-2xy)\mathrm{e}^{-y}+\psi(y)$$

取代换，$u=x,v=y-x$，反之则有：$x=u,y=u+v$，代入上式可得：

$$f(u,v)=-2uv\mathrm{e}^{-(u+v)}+\psi(u+v)$$

题目信息中，$f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$，代入即得：

$$\psi(u)=u^2\mathrm{e}^{-u}$$

$$f(u,v)=-2uv\mathrm{e}^{-(u+v)}+(u+v)^2\mathrm{e}^{-(u+v)}=(u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

$$f(u,v)=(u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

【例题 10.3.24 中等题】（2024 数学一 5 分）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}f|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，令 $y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$______.

答案：5.

解析：由 $\mathrm{d}f|_{(1,1)}=3\ \mathrm{d}u+4\ \mathrm{d}v$ 知，$f_1'(1,1)=3, f_2'(1,1)=4$.

又 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot(-\sin x)+f_2'\cdot 2x$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=&[f_{11}''\cdot(-\sin x)+f_{12}''\cdot 2x](-\sin x)+f_1'\cdot(-\cos x)\\&+[f_{21}''\cdot(-\sin x)+f_{22}''\cdot 2x](2x)+2f_2'\end{aligned}$$

则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\cdot(-1)+2f_2'(1,1)=-3+8=5$.

【例题 10.3.25 中等题】（2024 数学二 12 分）已知函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且函数 $g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$ 满足 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

（1）求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$

（2）若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=u\mathrm{e}^{-u}$，$f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$，求 $f(u,v)$ 的表达式.

解析：（1）$\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot 3$　$\frac{\partial g}{\partial y}=f_1'-f_2'$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=4f_{11}''+12f_{12}''+9f_{22}''$，$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=2f_{11}''+f_{12}''-3f_{22}''$，$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f_{11}''-2f_{12}''+f_{22}''$

代入原方程：$25f_{12}''=1\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{1}{25}$

（2）

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{1}{25}\Rightarrow f_u'=\frac{1}{25}v+c(u)$$

$$f_u'(u,0)=u\mathrm{e}^{-u}\Rightarrow c(u)=u\mathrm{e}^{-u}\Rightarrow f_u'(u,v)=\frac{1}{25}v+u\mathrm{e}^{-u}$$

$$f(u,v)=\frac{1}{25}uv-\mathrm{e}^{-u}(u+1)+c(v)$$

$$f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1\Rightarrow c(v)=\frac{1}{50}v^2$$

$$f(u,v)=\frac{1}{25}uv-\mathrm{e}^{-u}(u+1)+\frac{1}{50}v^2$$

【例题 10.3.26 中等题】（2025 数学一 12 分 仅适合数学一、数学二考生做）

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数，记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$，若 $g(x,y)$

满足$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$，且$g(x,x)=1$，$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$，求$f(u)$.

答案：针对$g(x,y)$求偏导数：

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

代入题目提供的方程，可得：

$$\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)=1$$

化简则为：

$$\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)=1$$

设$\frac{x}{y}=u$，则转化为：

$$f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=\frac{1}{u^2}$$

将$f'(u)$设为函数$v(u)$，则有$f''(u)=v'(u)$，进而有：

$$v'+\frac{1}{u}v=\frac{1}{u^2}$$

按照一阶线性微分方程进行求解，即可得到：

$$v=\frac{\ln u+C_1}{u}$$

即：

$$f'(u)=\frac{\ln u+C_1}{u}$$

根据题目给的信息，$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$，即为：$\frac{1}{x}f'(1)=\frac{2}{x}$，所以$f'(1)=2$，由此确定常数$C_1=2$。

$$f'(u)=\frac{\ln u+2}{u}$$

求原函数可得：

$$f(u)=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+C_2$$

根据题目信息，$g(x,x)=1$，可得$f(1)=1$，由此确定常数$C_2=1$。

$$f(u)=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+1$$

10.4 多元函数极值问题

无条件极值

多元函数极值的必要条件：函数$f(x,y)$具有偏导数，且在(x_0,y_0)点处为极值点，则必有：

$$f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$$

多元函数极值的充分条件：设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令：

$$f_{xx}''(x_0,y_0)=A,f_{xy}''(x_0,y_0)=B,f_{yy}''(x_0,y_0)=C$$

则有：

（1）$AC-B^2>0$时，该点取得极值，且当$A<0$时为极大值，且当$A>0$时为极小值；

（2）$AC-B^2<0$时，该点不取极值；

（3）$AC-B^2=0$时，可能有极值也可能没有，具体问题具体分析（一般用极值点定义加以判断）。

求函数极值的流程如下：

（1）解方程组：

$$\begin{cases}f_x'(x,y)=0\\f_y'(x,y)=0\end{cases}$$

得到方程所有的驻点，即为潜在的极值点。

（2）求得每一个驻点处的A、B、C（二阶偏导）

（3）根据$AC-B^2$以及A的符号，来判定该驻点是否为极值，以及是极大值还是极小值。

【例题 10.4.1 基础题】求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解：$f_x'(x,y)=3x^2+6x-9$，$f_y'(x,y)=-3y^2+6y$，则求方程组：

$$\begin{cases}3x^2+6x-9=0\\-3y^2+6y=0\end{cases}$$

解得：$x_1=1,x_2=-3,y_1=0,y_2=2$，所以驻点有：$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

$f_{xx}''(x,y)=6x+6$，$f_{xy}''(x,y)=0,f_{yy}''(x,y)=-6y+6$,

在$(1,0)$处，有：$A=12,B=0,C=6,AC-B^2>0$，所以$(1,0)$处取极小值$f(1,0)=-5$；

在$(1,2)$处，有：$A=12,B=0,C=-6,AC-B^2<0$，所以$(1,2)$处不是极值点；

在$(-3,0)$处，有：$A=-12,B=0,C=6,AC-B^2<0$，所以$(-3,0)$处不是极值点；

在$(-3,2)$处，有：$A=-12,B=0,C=-6,AC-B^2>0$，所以$(-3,2)$处取极大值$f(-3,2)=31$；

【例题 10.4.2 基础题】（2024 数学二/数学三 5 分）函数

$f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是________.

答案：$(1,1)$

【例题 10.4.3 基础题】（2021 数学三 12 分）求函数

$f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

答案：将函数进行分段：

$$f(x,y)=\begin{cases}2\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1+y^2}{2x^2}, & x>0\\ 2\ln(-x)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1+y^2}{2x^2} & x<0\end{cases}$$

求偏导数，并使其为 0：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1+y^2}{x^3}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\ or\ \dfrac{1}{2}\\ y=0\end{cases}$$

驻点坐标为$(-1,0)$和$\left(\frac{1}{2},0\right)$，进一步判断极值情况：

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3(1+y^2)}{x^4}$$

$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^3}$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}$$

在$(-1,0)$处有：$AC-B^2=96>0$，且$A>0$，所以该点属于极小值点；

在$\left(\frac{1}{2},0\right)$处有：$AC-B^2=3>0$，且$A>0$，所以该点属于极小值点.

函数$f(x,y)$的极小值为$f(-1,0)=2,f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{2}-2\ln 2$.

【例题 10.4.4 基础题】（2022 数学二 12 分）已知可微函数$f(u,v)$满足

$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$，且$f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（1）记$g(x,y)=f(x,y-x)$，求$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求$f(u,v)$的表达式和极值.

答案：本题在前面章节（多元复合函数求导）已经完成了第（1）问和（2）中的表达式，求得了：

$$f(u,v)=(u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

求驻点：

$$\begin{cases} f'_1=(2u-u^2-v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}=0 \\ f'_1=(2v-u^2-v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} or \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

利用二阶偏导判断极值情况：

$$A=f''_{11}=(2-4u+u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$
$$B=f''_{12}=(-2v-2u+u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$
$$C=f''_{22}=(2-4v+u^2+v^2)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

在$(0,0)$处，$AC-B^2>0$，且$A>0$，此处为极小值；
在$(1,1)$处，$AC-B^2<0$，此处不是极值点。

$f(u,v)$的极小值为$f(0,0)=0$.

【例题 10.4.5 基础题】（2023 数学一 12 分）求函数

$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值。

【解 2 析】$\begin{cases} f'_x=-x(2y+3xy-5x^3)=0 \\ f'_y=2y-x^2-x^3=0 \end{cases}$，得驻点为$(0,0),(1,1),\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$.

$f''_{xx}=-(2y+3xy-5x^3)-x(3y-15x^2)$，$f''_{xy}=-x(2+3x)$，$f''_{yy}=2$.

（1）$(0,0)$点：$\begin{cases} A=f''_{xx}=0 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$，$AC-B^2=0$，而从$(0,0)$起始，沿着$x$轴（$y=0$）移动$\Delta x$，则有$A(\Delta x,0),B(-\Delta x,0)$，两点的函数值分别为$(\Delta x)^5,-(\Delta x)^5$，分别一正一负，所以$(0,0)$处的函数值 0 既不是极大值也非极小值；

（2）$(1,1)$点：$\begin{cases} A=f''_{xx}=12 \\ B=f''_{xy}=-5 \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$，$AC-B^2<0$，$(1,1)$不是极值点；

（3）$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$点：$\begin{cases} A=f''_{xx}=\dfrac{100}{27} \\ B=f''_{xy}=-\dfrac{8}{3} \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$，$AC-B^2>0$且$A>0$，$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$是极小值点，极小值为$-\dfrac{4}{729}$。

【例题 10.4.6 基础题】（2023 数学二 12 分）求函数$f(x,y)=x\mathrm{e}^{\cos y}+\dfrac{1}{2}x^2$的

极值.

解析：$f'_x(x,y)=e^{\cos y}+x$，$f'_y(x,y)=xe^{\cos y}(-\sin y)$

令两个偏导数为 0，解得：

（1）驻点为$(-e^{-1},k\pi)$，其中k为奇数；

（2）驻点为$(-e,k\pi)$，其中k为偶数。

$$f''_{xx}(x,y)=1, f''_{xy}(x,y)=e^{\cos y}(-\sin y), f''_{yy}(x,y)=xe^{\cos y}\sin^2 y+xe^{\cos y}(-\cos y)$$

当k为奇数时，在驻点$(-e^{-1},k\pi)$处，$A=1, B=0, C=-e^{-2}, AC-B^2<0$，故$(-e^{-1},k\pi)$不是极值点。

当k为偶数时，在驻点$(-e,k\pi)$处，$A=1, B=0, C=e^2, AC-B^2>0$，故$(-e,k\pi)$是极小值点，且极小值为$-\frac{e^2}{2}$。

条件极值

多元函数的条件极值问题：多元函数$z=f(x,y)$欲求得极值，但是同时x、y需要满足一定的条件$g(x,y)=0$，这时构造一个新的表达式：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

该式也被称为“拉格朗日函数”，它对应有L'_x, L'_y, L'_λ，三项偏导数皆为 0 时，即可得到满足条件的驻点和极值点。这种方法被称为拉格朗日乘数法。

【例题 10.4.7 基础题】直角三角形的斜边长度为l，求两直角边长度取何值时，该三角形具有最大周长。

解：设三角形的两直角边分别长为x、y，则三角形的周长：

$$S=x+y+l$$

而其中x、y需要满足$\sqrt{x^2+y^2}=l$，即$x^2+y^2=l^2$.

拉格朗日函数：$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$，解下列方程组：

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=l^2 \end{cases}$$

解得：$\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2l}, x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$.

所以，当$x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$时，该直角三角形周长取最大值。

【例题 10.4.8 拔高题】设中心在原点的椭圆为$x^2-4xy+5y^2=1$，求该椭圆的长半轴和短半轴。

解：该问题属于条件极值问题，设椭圆上的点到原点的距离为$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，而椭圆上的点需要满足条件：$x^2-4xy+5y^2=1$，于是令：

$$L=x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$$

为求得极值则有：

$$\begin{cases} L'_x = (2+2\lambda)x - 4\lambda y = 0 \\ L'_y = (2+10\lambda)y - 4\lambda x = 0 \\ L'_x = x^2 - 4xy + 5y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

为使得前两个方程有非零解，行列式 $\begin{vmatrix} 1+\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1+5\lambda \end{vmatrix} = 0$

则得到：$\lambda = -3 \pm 2\sqrt{2}$

而前两个方程左右各自乘以x,y再相加，可得：

$$(2+2\lambda)x^2 - 4\lambda xy + (2+10\lambda)y^2 - 4\lambda xy = 0$$

$$x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 5y^2 - 4xy) = 0$$

$$x^2 + y^2 = -\lambda$$

由此可得，$x^2 + y^2 = -\lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$，所以$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$的最大值和最小值分别

为$\rho_{\min} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1, \rho_{\max} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

【例题 10.4.9 拔高题】（2021 数学一 12 分）已知曲线C:$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30, \end{cases}$

求C上的点到xOy坐标面距离的最大值.

答案：属于条件极值问题，需要求得$|z|$的最大值，而附加的条件有两条，对应的拉格朗日函数为：

$$L = |z| + \lambda_1(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \lambda_2(4x + 2y + z - 30)$$

这样处理可能有些麻烦，我们不妨灵活处理：①求$|z|$的最大值也可以理解为求z的最大值或最小值；②利用曲线方程，可以消去一些变量，转化为单个条件。

根据曲线的第二条方程，我们得到：$z = 30 - 4x - 2y$，代入第一条方程，可得

$$x^2 + 2y^2 - (30 - 4x - 2y) - 6 = 0$$

构造拉格朗日函数为：

$$L = 30 - 4x - 2y + \lambda[x^2 + 2y^2 - (30 - 4x - 2y) - 6]$$

求偏导为 0，则有：

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x + 4\lambda = 0 \\ L'_y = -2 + 4\lambda y + 2\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - (30 - 4x - 2y) - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \end{cases} or \begin{cases} x = -8 \\ y = -2 \\ \lambda = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

在$(4,1)$处，$z = 12$；在$(-8,-2)$处，$z = 66$. 所以最大值为 66

【例题 10.4.10 中等题】（2022 数学三 12 分 仅数学三考生做）设某产品的产量Q由资本投入量x和劳动投入量y决定，生产函数为$Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价$p$与$Q$的关系为$p = 1160 - 1.5Q$. 若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

答案：总利润l =价格p×销量Q −总成本，即：

$$l(x,y,Q)=Q(1160-1.5Q)-6x-8y$$

而生产函数$Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$可看作条件，按照条件极值的拉格朗日乘数法进行解决，构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,Q,\lambda)=Q(1160-1.5Q)-6x-8y+\lambda\left(12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-Q\right)$$

对应偏导为 0，可得：

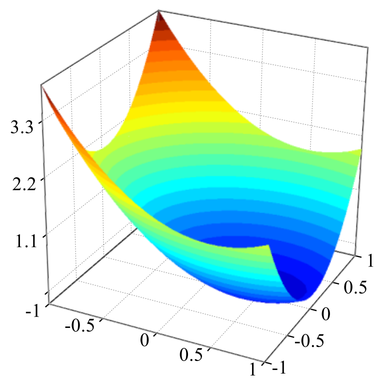
$$\begin{cases} L'_x=-6+6\lambda x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}=0 \\ L'_y=-8+2\lambda x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}}=0 \\ L'_Q=1160-3Q-\lambda=0 \\ L'_\lambda=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-Q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=256 \\ y=64 \\ Q=384 \end{cases}$$

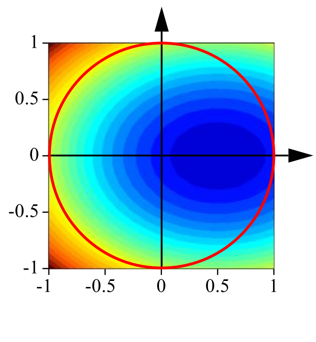
利润最大时的产量为 384。

最值问题

多元函数的最值问题：对于多元函数$z=f(x,y)$，给定在某个有限大区域D，求该区域的函数最值。此时需要当作两个不同问题看待：
①在区域内部，使用无条件极值的处理方式，搜寻可能存在的驻点、极值点；
②在区域边界，使用条件极值（边界曲线方程即为条件），找到边界上的极值。
计算出各个位置的极大值和极小值，选择其中的最大和最小值。

【例题 10.4.11 中等题】设有一圆板占有空间闭区域$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$，该圆板温度分布为$T=x^2+2y^2-x$，求该圆板的最热点和最冷点。





解：首先判断极值点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}=2x-1=0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}=4y=0 \end{cases}$$

解得极值点为$\left(\frac{1}{2},0\right)$. 在该点处，$A=T_{xx}=2,B=T_{xy}=0,C=T_{yy}=4,AC-B^2>0$，所以在$\left(\frac{1}{2},0\right)$处取得极小值为$T\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$.

而在边界上有$x^2+y^2=1$，代入$T=x^2+2y^2-x$，则边界上的温度为：

$T_{edge}(x)=x^2+2(1-x^2)-x=2-x^2-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

当$x=-\frac{1}{2}$时，边界温度$T_{edge}(x)$取得最大值$\frac{9}{4}$，对应的点坐标为$\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

当$x=1$时，边界温度$T_{edge}(x)$取得最小值 0.

综上所述，整个圆板上温度最高值在$\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$点处为$\frac{9}{4}$，最低温度在$\left(\frac{1}{2},0\right)$处为$-\frac{1}{4}$.

【例题 10.4.12 中等题】（2022 数学一 5 分）当$x\geqslant 0,y\geqslant 0$时，$x^2+y^2\leqslant k\mathrm{e}^{x+y}$恒成立，则$k$的取值范围是______.

答案：$[4\mathrm{e}^{-2},+\infty)$

解析：将不等式$x^2+y^2\leq k\mathrm{e}^{x+y}$变形为$k\geq\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}$，本题需要求$\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}$在$x\geqslant 0,y\geqslant 0$时的最大值，首先求区域内部的极值。

令$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}},x\geq 0,y\geq 0$，求偏导数$f_x(x,y)$：

$$f_x(x,y)=\frac{2x\mathrm{e}^{x+y}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}}{(\mathrm{e}^{x+y})^2}=\frac{2x-(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x+y}}=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{2y\mathrm{e}^{x+y}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}}{(\mathrm{e}^{x+y})^2}=\frac{2y-(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x+y}}=0$$

解得驻点为(1,1)和(0,0)，这两点处的函数值$f(1,1)=\frac{2}{\mathrm{e}^2},f(0,0)=0$.

还需考虑边界，取$y=0(x\geq 0)$，此时函数表达式为$f(x,0)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$，对$x$求导数为0，可得：

$$\frac{(2x-x^2)}{\mathrm{e}^x}=0,x=2$$

此时函数取值为$f(2,0)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$. 同理，可知在另一个边界，$x=0(y\geq 0)$也有相同的极值为$f(0,2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$.

综上所述，$\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ 在 $x\geq 0, y\geq 0$ 时的最大值为 $4e^{-2}$。

10.5 隐函数定理

隐函数存在定理 1（一元函数隐函数）：如果二元方程 $F(x,y)=0$ 满足如下三个条件：

（1）函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域有连续的偏导数；

（2）$F(x_0,y_0)=0$；

（3）$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$；

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 某邻域恒能唯一确定一个连续函数 $y=y(x)$，它满足 $y_0=y(x_0)$，并有连续的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}\left(F'_y\neq 0\right)$$

【例题 10.5.1 基础题】设 $\sin y+e^x-xy^2=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：解法一：

利用《高等数学（上）》中隐函数求导的方法，$\sin y+e^x-xy^2=0$ 左右两侧同时对 x 求导：

$$y'\cos y+e^x-(y^2+2xyy')=0 \quad y'=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$$

解法二：利用隐函数导数定理 1，设 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则有：

$$F_x=e^x-y^2 \quad F_y=\cos y-2xy \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$$

隐函数存在定理 2（多元函数隐函数）：如果三元方程 $F(x,y,z)=0$ 满足如下三个条件：

（1）函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 某邻域有连续偏导数

（2）$F(x_0,y_0,z_0)=0$

（3）$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则此方程在点 (x_0,y_0,z_0) 某邻域恒能唯一确定一个连续函数 $z=z(x,y)$，有连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

【例题 10.5.2 基础题】设$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设$F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$

$$F_x'=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}}, F_y'=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}}, F_z'=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}}}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=-\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}}}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}-xy}(\sqrt{xyz}\neq xy)$$

【例题 10.5.3 基础题】设方程$xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，在点$(0,1,1)$的某个邻域内该方程（ ）

A. 可确定隐函数$y=y(x,z),z=z(x,y)$

B. 可确定隐函数$x=x(y,z),z=z(x,y)$

C. 可确定隐函数$y=y(x,z),x=x(y,z)$

D. 只可确定隐函数 $z=z(x,y)$

答案：设$F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，其中$F_x'(0,1,1)=2,F_y'(0,1,1)=-1,F_z'(0,1,1)=0$

因此根据隐函数存在定理可知，选 C

【例题 10.5.4 基础题】（2021 数学二 5 分）设函数$z=z(x,y)$由方程

$(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$______.

答案：1

【例题 10.5.5 基础题】（2023 数学二 5 分）设函数$z=z(x,y)$由方程

$\mathrm{e}^z+xz=2x-y$，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$_____.

答案：$-\frac{3}{2}$

解析：当$x=1,y=1$得$z=0$

原方程两边对x求偏导得$\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=2$，代入$(1,1,0)$得$\frac{\partial z}{\partial x}=1$；

方程两边再对x求偏导得$e^z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，代入

$(1,1,0)$及$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$，得$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{3}{2}$。

【例题 10.5.6 基础题】（2024 数学三 12 分）设函数$z=z(x,y)$由方程

$z+e^x-y\ln(1+z^2)=0$确定，求$\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{(0,0)}$.

原方程对x求偏导得$z_x'+e^x-y\cdot\dfrac{2zz_x'}{1+z^2}=0$，从而$z_x'(0,0)=-1$；

继续对x求偏导得$z_{xx}''+e^x-y\cdot\left(\dfrac{2zz_x'}{1+z^2}\right)_x'=0$，从而$z_{xx}''(0,0)=-1$；

原方程对y求偏导得$z_y'-1\cdot\ln(1+z^2)-y\cdot\dfrac{2zz_y'}{1+z^2}=0$，从而$z_y'(0,0)=\ln 2$；

继续对y求偏导得$z_{yy}''-\dfrac{2zz_y'}{1+z^2}-1\cdot\dfrac{2zz_y'}{1+z^2}-y\cdot\left(\dfrac{2zz_y'}{1+z^2}\right)_y'=0$，从而

$z_{yy}''(0,0)=-2\ln 2$；

综上，$\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{(0,0)}=-1-2\ln 2$.

隐函数存在定理 3：4 个变量 2 个方程构成的方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$可以确定

两个二元函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$，其中F,G有连续的偏导数．若

$u(x,y),v(x,y)$可偏导，则两条方程的两侧分别对x,y求偏导数，应用复合函数求导法则即得

$$\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}F_y'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\G_y'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

这分别可看成是关于偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$（ 或 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}$ ）的二元一次方程组，可利用克莱姆法则求出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$（ 或 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}\Big)$.

【例题 10.5.7 基础题】设 $xu-yv=0, yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$

解：在每个方程中，对 x 求导，可得：

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+u-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}+v=0 \end{cases}$$

方程组中 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 作为未知数，通过移项、消元就可以得到对应的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2} \end{cases}$$

同理可通过两个方程各自对 y 求偏导数，得：$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$

【拓展内容】克莱默法则：求线性方程组的行列式算法，对于如下线性方程组：

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$$

对应的解为：$x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}, y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}$，其中要求分母不为零，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}=an-bm\neq 0$

【例题 10.5.8 基础题】设 $\begin{cases} y=f(x,z) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$，其中 f,F 均具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

方法一：将方程组中的两个方程，均对 x 求导，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ F'_1+F'_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_3\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

将 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 消元，可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'_1-\dfrac{f'_2F'_1}{F'_3}}{1+f'_2\dfrac{F'_2}{F'_3}}=\dfrac{F'_3f'_1-f'_2F'_1}{F'_3+f'_2F'_2}$

方法二：对两个方程进行微分处理可知：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = f'_1\mathrm{d}x + f'_2\mathrm{d}z \\ F'_1\mathrm{d}x + F'_2\mathrm{d}y + F'_3\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

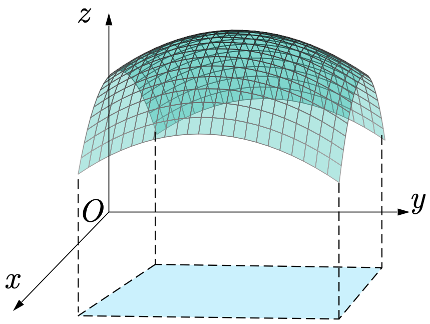
将 $\mathrm{d}z$ 消元，可得：

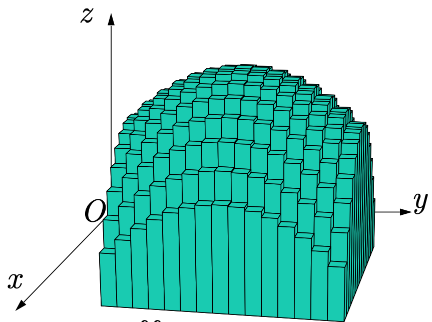
$\mathrm{d}y = f'_1\mathrm{d}x + f'_2\left(\dfrac{F'_1\mathrm{d}x + F'_2\mathrm{d}y}{-F'_3}\right)$，$\mathrm{d}y = \dfrac{F'_3 f'_1 - f'_2 F'_1}{F'_3 + f'_2 F'_2}\mathrm{d}x$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{F'_3 f'_1 - f'_2 F'_1}{F'_3 + f'_2 F'_2}$$

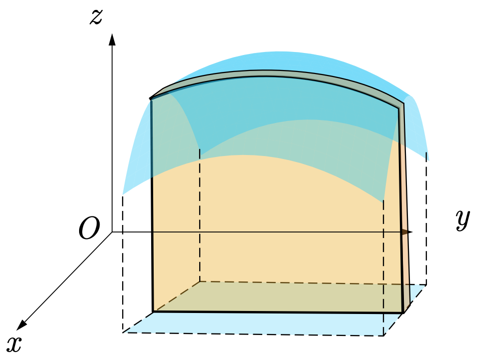
第11讲 重积分

二重积分的基本概念：求曲面下的体积

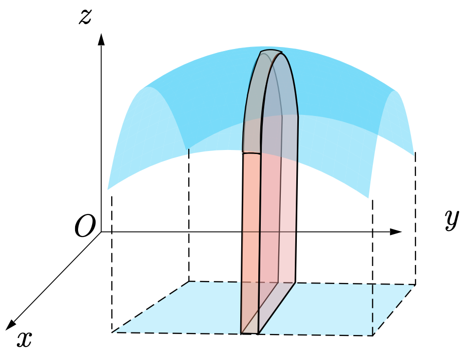




$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

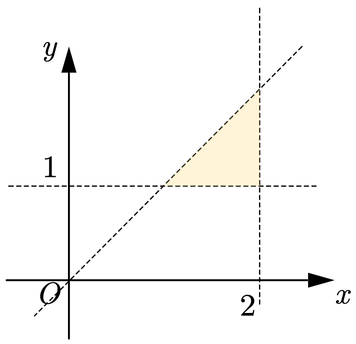


$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

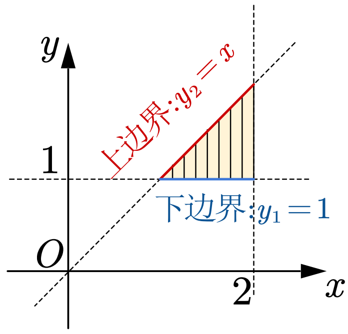
11.1 二重积分概念与基本运算

【例题 11.1.1 基础题】计算$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D是由直线$y=1,x=2,y=x$所围成的区域。

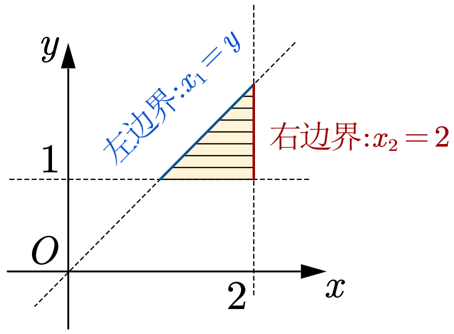
解：第 1 步：画出积分区域



第 2 步：切割区域，确定各子区域的上下/左右边界



竖切



横切

第 3 步：将二重积分写为二次积分，计算

①竖切：

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\left[\int_1^x xy\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right)_1^2$$

$$=\frac{9}{8}$$

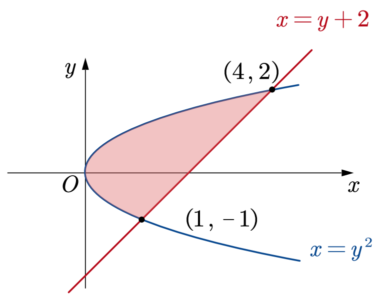
②横切：

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}y=\int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2\mathrm{d}x=\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(y^2-\frac{y^4}{4}\right)_1^2$$

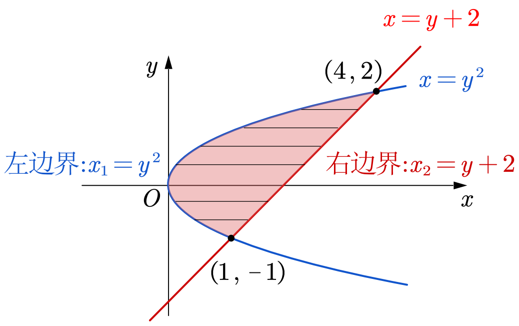
$$=\frac{9}{8}$$

【例题 11.1.2 基础题】计算$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D是由抛物线$y^2=x$以及直线$y=x-2$所围成的闭区域。

解：第 1 步：画出积分区域



第 2 步：切割区域，确定各子区域的上下/左右边界，根据积分区域特点，选择横切，得到左右边界：

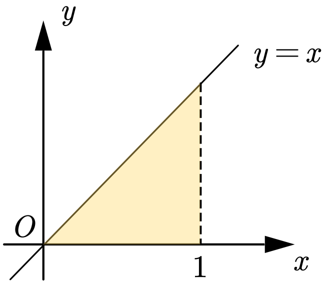


第 3 步：将二重积分写为二次积分，计算

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2y}{2}\right)_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[(y(y+2)^2-y^5)]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{45}{8}$$

【例题 11.1.3 基础题】计算$\iint_D \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线$y=x,y=0,x=1$所围成的闭区域。



解：

横切：$\int_0^1\left[\int_x^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$　无法直接计算

竖切：$\int_0^1[\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$

【例题 11.1.4 基础题】设D是由直线$x^2+y^2=1,x^2+y^2=\frac{1}{4}$围成的封闭区域，并且有：

$$I_1=\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_3=\iint_D \arcsin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,\ I_4=\iint_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

则有：

A. $I_2<I_1<I_3<I_4$　　B. $I_2<I_4<I_1<I_3$

C. $I_1<I_2<I_3<I_4$　　D. $I_4<I_1<I_2<I_3$

解：根据基本不等式：$0<x<1$时有：$\sin x<x<\arcsin x$，$x>0$时有$x>\ln(1+x)$

所以排除 A,B,C，选 D

【例题 11.1.5 基础题】更改下列二次积分的积分次序：

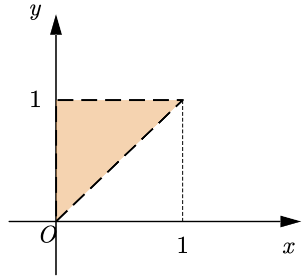
（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

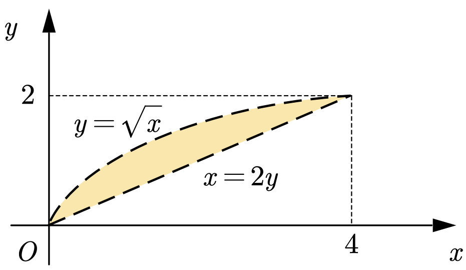
（4）$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解：（1）积分区域如图所示：



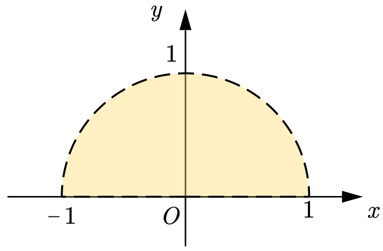
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

（2）积分区域如图所示：



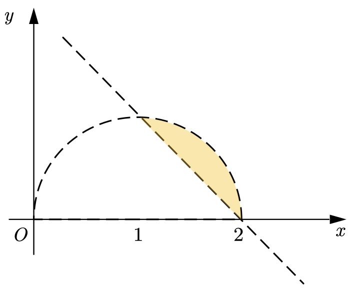
$$\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

（3）积分区域如图所示：



$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

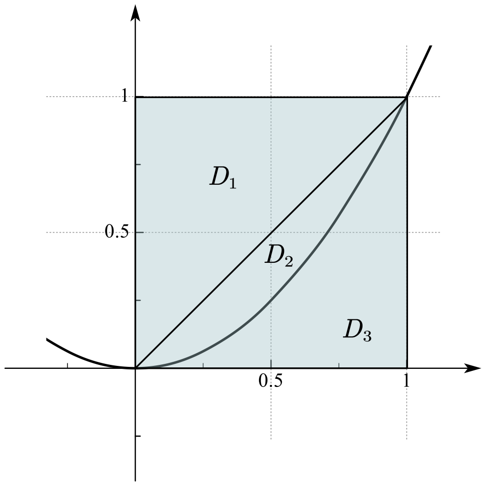
（4）积分区域如图所示：



$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

【例题 11.1.6 基础题】计算$\iint_D \max\{x,y\}\cdot|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$

解：积分区域划分如图所示：

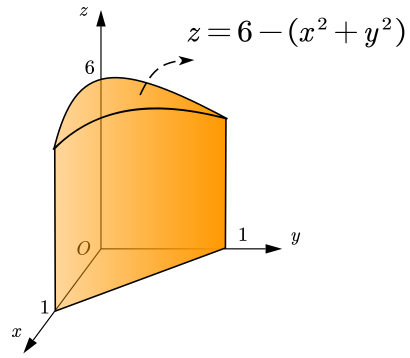


$$\iint_{D_1} y(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3} x(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

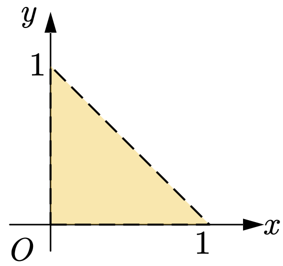
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 y(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x x(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} x(x^2-y)\mathrm{d}y=\frac{11}{40}$$

求由平面$x=0$，$y=0$，$x+y=1$所围成的柱体被平面$z=0$及抛物面$x^2+y^2=6-z$截得的立体体积。

解：该立体为一个曲顶柱体，在空间中的图形如图所示：



首先需要确定积分区域（即为该立体在xOy平面上的投影）：



确定高度函数：$z=6-(x^2+y^2)$，故体积：

$$V=\iint_D 6-(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}6-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[6(1-x)-x^2(1-x)-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{17}{6}$$

【例题 11.1.7 基础题】求导数

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\int_1^u \mathrm{d}x\int_1^x (2x^2+4y)\mathrm{d}y\right]$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_1^t \mathrm{d}x\int_1^{x^2} \sin y^2\mathrm{d}y\right]$

（1）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^u\left[\int_1^x (2x^2+4y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^u (2u^2+4y)\mathrm{d}y=(2u^2y+2y^2)\Big|_1^u=2u^3-2$$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_1^t\left[\int_1^{x^2}\sin y^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^{t^2}\sin y^2\mathrm{d}y$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_1^t \mathrm{d}x\int_1^{x^2}\sin y^2\mathrm{d}y\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_1^{t^2}\sin y^2\mathrm{d}y\right]=2t\sin t^4$$

【例题 11.1.8 基础题】求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \sin(xy)^2\mathrm{d}y}{t^6}$

交换分子的积分次序可得：

$$\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \sin(xy)^2\mathrm{d}y=\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \sin(xy)^2\mathrm{d}x$$

$$原式=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \sin(xy)^2\mathrm{d}x}{t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \sin(xt)^2\mathrm{d}x}{6t^5}$$

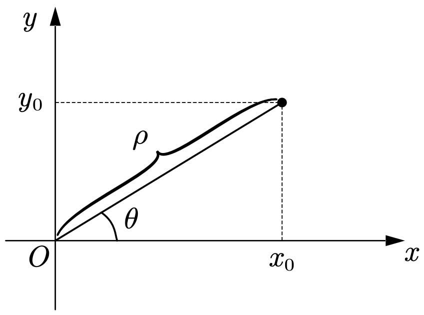
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin(u)^2\mathrm{d}u}{6t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t\sin t^4}{36t^5}=\frac{1}{18}$$

【例题 11.1.9 基础题】（2021 数学二 5 分）已知函数

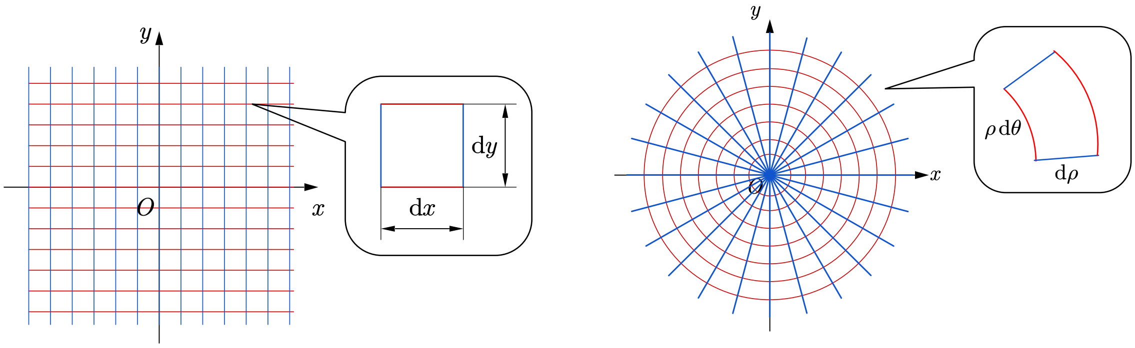
$f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^t \sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$ ，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$______

答案：$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$

11.2 极坐标运算



直角坐标系、极坐标系两种不同坐标系下对平面空间的切割：



利用极坐标计算二重积分的步骤：

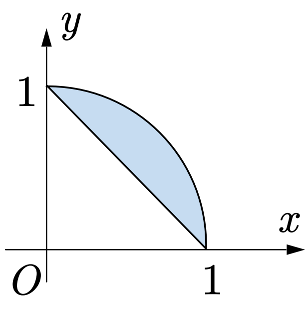
（1）被积函数$f(x,y)$换为$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$

（2）面积微元由“$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$”为“$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$”

（3）ρ、θ积分上下限根据图像特点确定。

【例题 11.2.1 基础题】计算二重积分$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D: x^2+y^2\leqslant 1, x+y\geqslant 1$

解：积分区域如图所示



利用极坐标求解：

（1）被积函数转化：$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\rho}$

（2）面积微元由“$\mathrm{d}\sigma$”为“$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$”：

$$\iint_D \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\rho}\mathrm{d}\sigma=\iint_D \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\rho}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\iint_D(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

（3）积分上下限根据ρ、θ确定

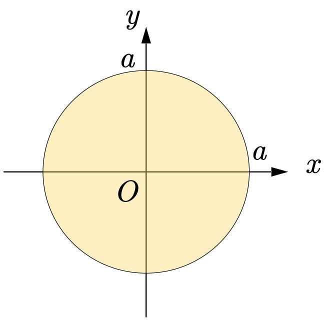
$$D: x^2+y^2\leqslant 1, x+y\geqslant 1 \to D: \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant \rho\leqslant 1$$

$$\iint_D(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)\mathrm{d}\theta=2-\frac{\pi}{2}$$

【例题 11.2.2 基础题】计算$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆心在原点、半径为$a$的圆周所围成的闭区域。

解：



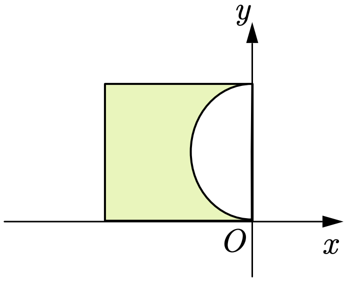
利用极坐标计算本题重积分为：

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)_0^a\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\mathrm{d}\theta=\pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)$$

【例题 11.2.3 基础题】计算二重积分$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$y=0, x=-2, y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域。

积分区域如图所示：



则可以记方形区域为D_1，半圆区域为D_2，则对应的积分可以记为：

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

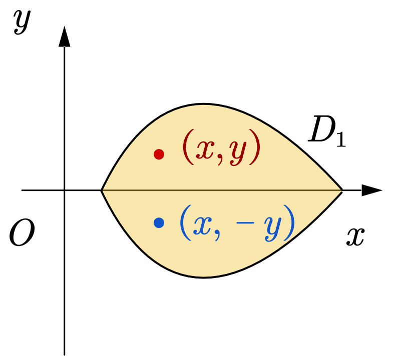
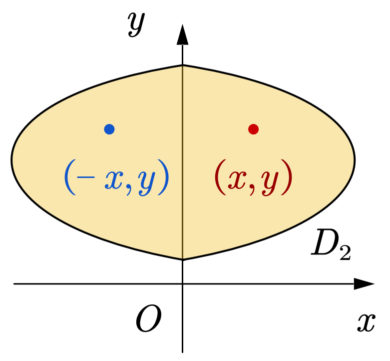
$$\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y=4$$

$$\iint_{D_2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta r\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}$$

11.3 对称性的应用

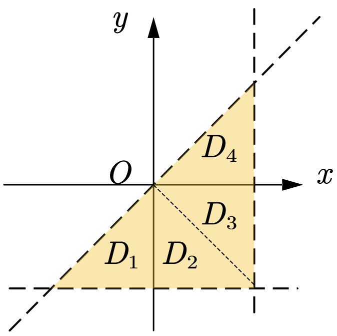
多元函数的奇偶性：

积分区域特点	D关于x轴对称	D关于y轴对称
图示		
验证规律	$f(x,-y)=-f(x,y)$	$f(-x,y)=-f(x,y)$
得出结论	$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$	$\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$

【例题 11.3.1 基础题】计算二重积分：$\iint_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由

$y=x,y=-1,x=1$围成.

解：积分区域如图所示：



$D=D_1+D_2+D_3+D_4$

D_1与D_2区域关于 y 轴对称，D_3与D_4区域关于 x 轴对称：

$$\iint_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D yx\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma$$

其中“$yx\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}$”关于$x$为奇函数，则在$D_1$与$D_2$区域中有：

$$\iint_{D_1+D_2} yx\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma=0;$$

“$yx\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}$”关于$y$也为奇函数，则在$D_3$与$D_4$区域中有：

$$\iint_{D_3+D_4} yx\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma=0,\ \text{于是：}$$

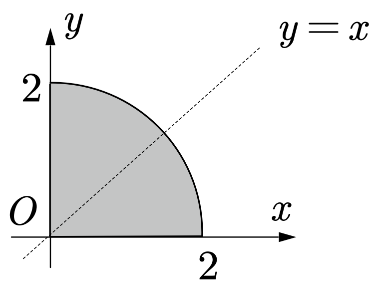
$$\iint_D y\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma+0=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}y\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$$

轮换对称性：假设积分区域D中将x与y互换后仍然是原区域（关于$y=x$对称），那么则有：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

【例题 11.3.2 中等题】计算$\iint_D\frac{3\sqrt{\sin^2x}+2\sqrt{\sin^2y}}{\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\sin^2y}}\mathrm{d}\sigma$，其中$D: x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0$

解：积分区域D是关于$y=x$对称的（换言之，在D的定义中将“x”、“y”互换符号，区域不变）



那么，则有：

$$\iint_D\frac{3\sqrt{\sin^2x}+2\sqrt{\sin^2y}}{\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\sin^2y}}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{3\sqrt{\sin^2y}+2\sqrt{\sin^2x}}{\sqrt{\sin^2y}+\sqrt{\sin^2x}}\mathrm{d}\sigma$$

所以原积分有：

$$I=\frac{1}{2}\left(\iint_D\frac{3\sqrt{\sin^2x}+2\sqrt{\sin^2y}}{\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\sin^2y}}\mathrm{d}\sigma+\iint_D\frac{3\sqrt{\sin^2y}+2\sqrt{\sin^2x}}{\sqrt{\sin^2y}+\sqrt{\sin^2x}}\mathrm{d}\sigma\right)$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{5\sqrt{\sin^2x}+5\sqrt{\sin^2y}}{\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\sin^2y}}\mathrm{d}\sigma=\frac{5}{2}\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\frac{5}{2}\pi$$

【例题 11.3.3 中等题】设$D: x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$，则 $\iint_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

根据轮换对称性：

$$\iint_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1+y-x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设原积分为I，则： $2I = \iint_D \frac{2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

利用极坐标运算可知：

$$I = \iint_D \frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}\ln 2$$

11.4 重积分应用

- 在三维空间中存在一个有限大曲面面积：

$$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 区域绕直线$Ax+By+C=0$旋转的体积：$\iint_D 2\pi\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- 重心与形心：在平面区域D中，如果对应的密度分布函数为$\mu(x,y)$，则有如下公式：

质量为：

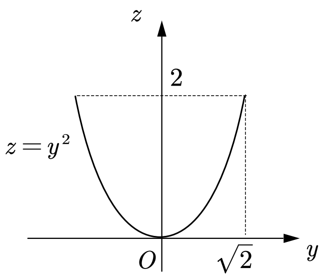
$$M = \iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

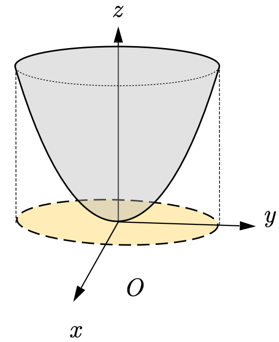
该区域的重心的坐标为： $\bar{x} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M}$，$\bar{y} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M}$

如果$\mu(x,y)=1$，上述公式对应计算的为形心坐标。

【例题 11.4.1 基础题】在yOz平面上的抛物线$z=y^2$从$z=0$到$z=2$的一段，绕z轴旋转一周得到曲面，求其面积。

解：旋转曲面方程为：$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 2)$，该曲面在$xOy$平面上的投影区域$D$为圆心在原点处、半径为$\sqrt{2}$的一个圆内区域。





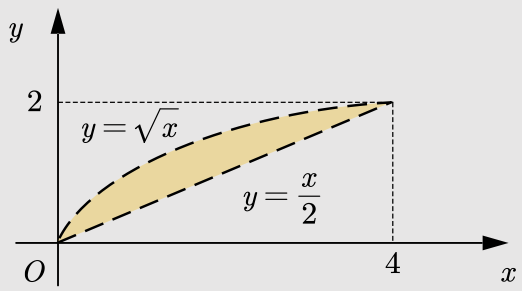
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y$$

于是：

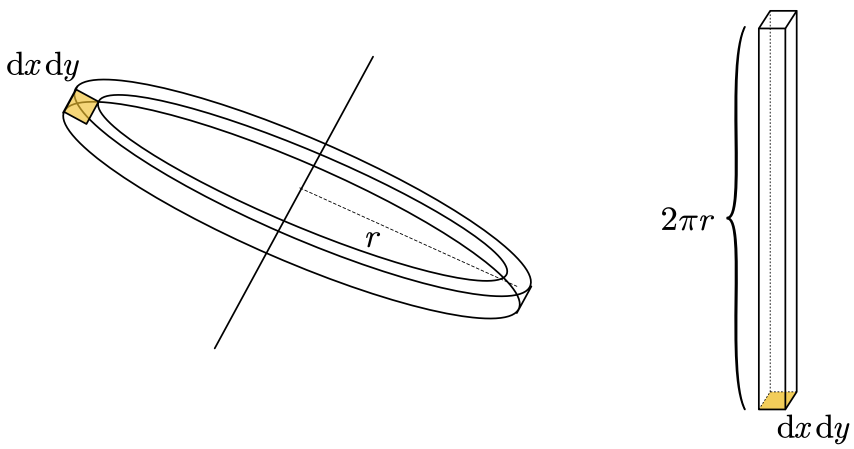
$$A=\iint_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}(1+4\rho^2)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+4\rho^2}\right)^3\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13\pi}{3}$$

【例题 11.4.2 基础题】平面上有一区域D如下图所示，求该区域绕着$y=\frac{x}{2}$旋转一周形成的立体体积。



解：从区域中取出一小块微元面积$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其绕转轴旋转一周，得到一个圆环，该圆环可拉长为长方体，如下图所示：



其中半径r就是微元面积$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$到直线的距离$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 所以该立体的体积公式为：

$$\iint_D 2\pi\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在本题中就是：

$$\iint_D \frac{2\sqrt{5}\pi}{5}(2y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}(2y-x)\mathrm{d}y$$

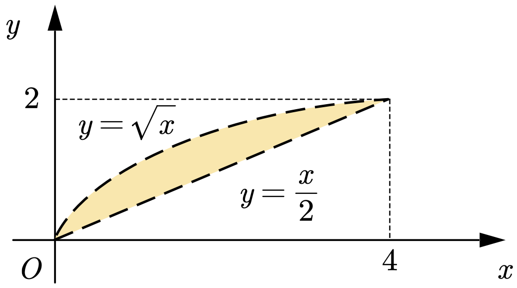
$$=\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}\int_0^4\left(x-x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}\cdot\frac{8}{15}=\frac{16\sqrt{5}\pi}{75}$$

古尔丁定理：

1. 旋转体体积：如果区域D面积为S，其形心到转轴的距离为d，则该区域绕转轴旋转形成的旋转体体积为：$V=2\pi Sd$.

2. 旋转体表面积：如果一段曲线的长度为L，该曲线的形心到转轴的距离为d，则该曲线绕转轴旋转形成的曲面表面积为：$A=2\pi Ld$.

同样是上面这道题，我们利用古尔丁定理求该区域绕着$y=\frac{x}{2}$旋转一周形成的立体体积



该区域的面积大小：$S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^4=\frac{4}{3}$

该区域的形心坐标：

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S}=\frac{\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}x\,\mathrm{d}y}{S}=\frac{32}{15}\div\frac{4}{3}=\frac{8}{5}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S}=\frac{\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}y\,\mathrm{d}y}{S}=\frac{4}{3}\div\frac{4}{3}=1$$

形心到转轴的距离为：$d=\frac{2\sqrt{5}}{25}$

基于古尔丁定理：$V=2\pi Sd=2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{25}=\frac{16\sqrt{5}\pi}{75}$

11.5 二重积分真题汇总

【例题 11.5.1 基础题】（2021 数学二 12 分）设平面区域D由曲线

$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\int_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

答案：曲线方程 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 在极坐标下转换为：

$$\rho^2=\cos 2\theta$$

因此，极坐标方程为 $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$ ，其中 θ 的范围为 $[0,\frac{\pi}{4}]$（因为 $\cos 2\theta\geq 0$）

$$\int_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

其中：

$$\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}=\frac{1}{4}(\cos 2\theta)^2$$

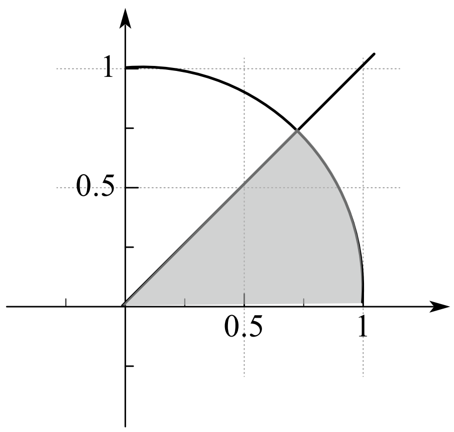
于是：

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi/4}\sin 2\theta\cdot\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{16}\int_0^1 u^2\mathrm{d}u=\frac{1}{48}$$

【例题 11.5.2 中等题】（2021 数学三 12 分）设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分

$$\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

答案：



$$\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^{\rho^2(1+\sin 2\theta)}\rho^3\cos 2\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{e}^{\rho^2(1+2\cos\theta\sin\theta)}\rho^3\cos 2\theta\,\mathrm{d}\rho$$

其中：

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\rho^2(1+2\cos\theta\sin\theta)}\rho^3\mathrm{d}\rho \xlongequal{u=\rho^2(1+\sin 2\theta)} \frac{1}{2(1+\sin 2\theta)^2}\int_0^1 u\,\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{1+\sin 2\theta}\sin 2\theta+1}{2(1+\sin 2\theta)^2}$$

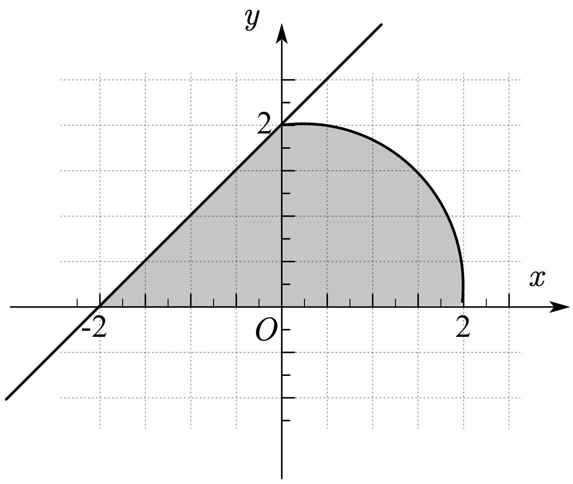
所以：

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\frac{\mathrm{e}^{1+\sin 2\theta}\sin 2\theta+1}{2(1+\sin 2\theta)^2}\mathrm{d}\theta \xlongequal{1+\sin 2\theta=t} \frac{1}{4}\int_1^2\frac{\mathrm{e}^t(t-1)+1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\mathrm{e}+\frac{1}{2}\right) = \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}$$

【例题 11.5.3 基础题】（2022 数学一/数学二/数学三 12 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，计算 $I=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

答案：



$$I=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(1-\sin 2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}(1-\sin 2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi-2+\pi=2\pi-2$$

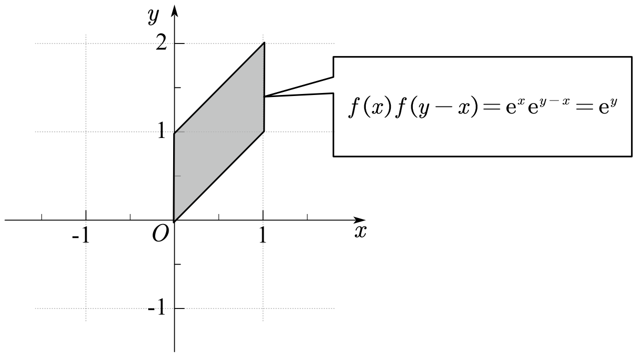
【例题 11.5.4 基础题】（2022 数学三 5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$____.

答案：$(\mathrm{e}-1)^2$

解析：

根据题目信息可知被积函数的情况：



【例题 11.5.5 基础题】（2022 数学二 5 分）$\int_0^2 dy\int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.　　B. $\frac{2}{3}$.　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　D. $\frac{1}{3}$.

答案：B

解析：需要变换积分次序。

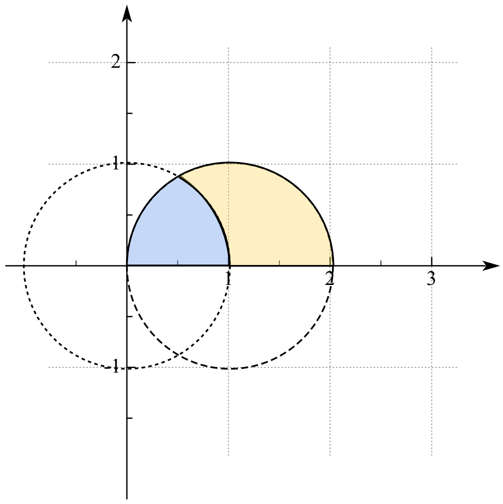
【例题 11.5.6 基础题】（2023 数学二 12 分）设平面区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1,x^2+y^2-xy=2$，与直线$y=\sqrt{3}x$，$y=0$所围成，计算$\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$

【详解】令$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 则$0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，$\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}\le r\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}$

$$\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{r}dr$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}-\ln\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}\right]d\theta$$
$$=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2\theta}{3+\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\tan\theta}{3+\tan^2\theta}=\ln\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\ln 2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\ln 2}{8\sqrt{3}}$$

【例题 11.5.7 中等题】（2023 数学三）设平面区域$D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\le 1\}$，计算$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy$

【详解】



由于积分域关于x轴对称，$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D_1为D在x轴上半部分，做$x^2+y^2=1$分D_1为左右两部分，左侧为D_2，右侧为D_3，

$$\iint_{D_1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中，

$$\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{6}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{18}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=\frac{\pi}{18}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin2\theta\left|\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{9}-\frac{16}{9}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\iint_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(r-1)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8}{3}\cos^3\theta-2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{16}{9}-\frac{\pi}{2}$$

代入：

$$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{9}-\frac{32}{9}+3\sqrt{3}$$

【例题 11.5.8 中等题】（2024 数学一 10 分）已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid\sqrt{1-y^2}\le x\le1,-1\le y\le1\right\}$，计算$\iint_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解析：由于积分区域关于 x 轴对称，被积函数关于 y 为偶函数，取该区域在第一象限内为

$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x =$

$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}(x^2+y^2)$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y - 2 = \left[y\sqrt{1+y^2} + \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right]\Big|_0^1 - 2$$

$$= \sqrt{2} - 2 + \ln(1+\sqrt{2})$$

【例题 11.5.9 基础题】（2024 数学二/数学三 5 分）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y =$（　　）

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

答案：A

【例题 11.5.10 基础题】（2024 数学二/数学三 10 分）设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy=\frac{1}{3},xy=3$ 与直线 $y=\frac{1}{3}x,y=3x$ 围成，计算 $\iint_D (1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析：利用轮换对称性积分，$\iint_D (1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8\ln 3}{3}$

【例题 11.5.11 基础题】（2025 数学一/数学二 5 分）设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4} f(x,y)\mathrm{d}y =$

A. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

B. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

C. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

D. $2\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

答案：A

【例题 11.5.12 基础题】（2025 数学三 5 分）设函数 $f(x)$ 连续，

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x =$$

A. $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^1 (1+x)f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x$.

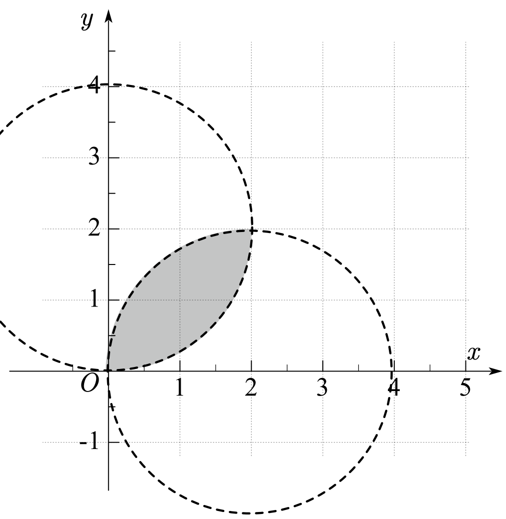
D. $\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$.

答案：D

【例题 11.5.13 基础题】（2025 数学二 12 分）已知平面有界区域

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4x,x^2+y^2\leqslant 4y\}$，计算 $\iint_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

答案：



$$\iint_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}\rho^3(1-\sin 2\theta)\mathrm{d}\rho+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}\rho^3(1-\sin 2\theta)\mathrm{d}\rho$$

$$=12\pi-\frac{112}{3}$$

【例题 11.5.14 基础题】（2025 数学三 12 分）已知平面有界区域

$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x,x^2\leqslant y\}$ ，计算二重积分

$$\iint_D (x-y+1)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

答案：$\dfrac{71}{210}$