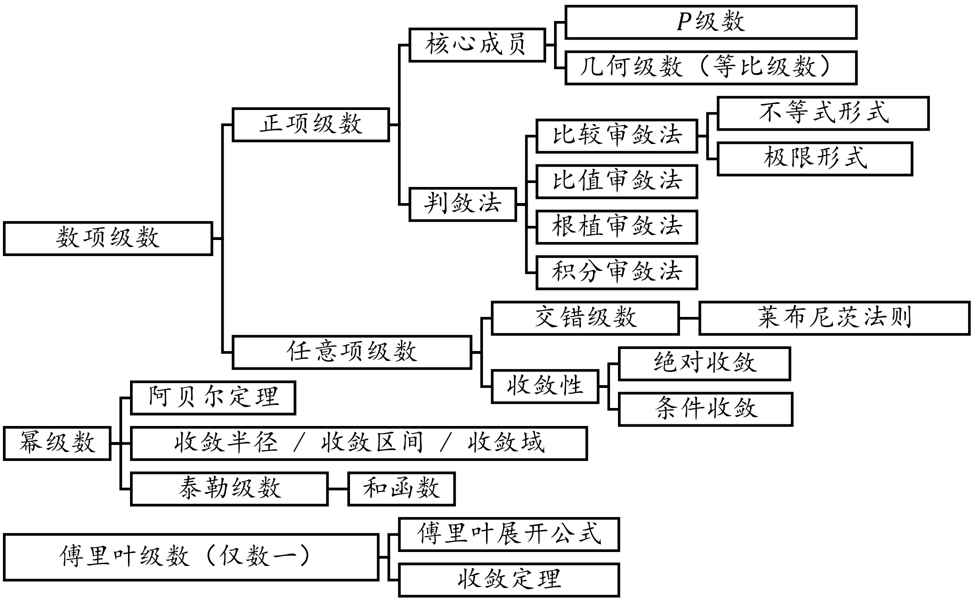
第11讲 无穷级数



11.1 数项级数

数项级数的基本概念

级数的定义：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$（$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$为部分和），若极限存在则级数收敛，否则发散。

收敛级数的必要条件：若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；逆命题不成立（如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$但级数发散）。

基本性质：

（1）线性性质：若$\sum u_n$收敛于S，$\sum v_n$收敛于T，则$\sum(au_n + bv_n)$收敛于$aS + bT$（a, b为常数）；若一个收敛、一个发散，则$\sum(au_n + bv_n)$必发散。

（2）敛散性与有限项无关：改变级数的有限项，不改变其敛散性。

正项级数

级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中，如果满足$u_n > 0$，则该级数为正项级数。

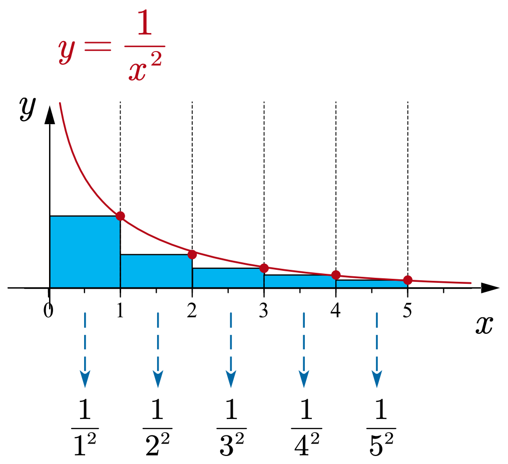
常见的基本正项级数：

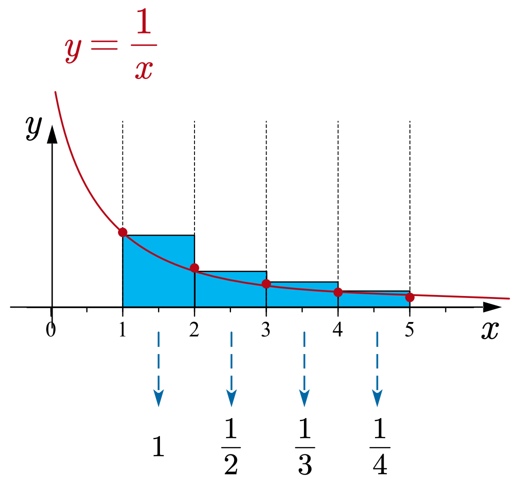
（1）等比级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n \, (a_0 > 0, q > 0)$，收敛条件$0 < q < 1$

（2）调和级数（发散）：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

（3）p级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，当$p > 1$时收敛，当$p \leqslant 1$时发散（调和级数属于$p = 1$时的$p$级数）。

图解p级数的收敛/发散：





对于正项级数的敛散性，存在以下判定方法：

判别法	核心公式 / 条件	适用场景
比较判别法（不等式形式）	若$0\le u_n\le v_n$： 1．若$\sum v_n$收敛，则$\sum u_n$收敛； 2．若$\sum u_n$发散，则$\sum v_n$发散。	已知敛散性的基本级数（如p级数、等比级数）与未知级数比较。比如$\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$。
比较判别法（极限形式）	若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(v_n>0)$： 1．若$0<l<+\infty$，则$\sum u_n$与$\sum v_n$同敛散； 2．若$l=0,\sum v_n$收敛则$\sum u_n$收敛； 3．若$l=+\infty,\sum v_n$发散则$\sum u_n$发散。	无法直接比较u_n与v_n，但可通过"极限"判断两者"等价或同阶"。 比如$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n^3+1}$、$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{1}{n}\right)$
比值判别法（达朗贝尔）	若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$： 1．若$\rho<1$，收敛； 2．若$\rho>1$（或$\rho=+\infty$），发散； 3．若$\rho=1$，判别法失效（需换其他方法）。	u_n含"阶乘"$(n!)$、"指数"(a^n)等形式（如$\sum\frac{n!}{n^n}$）。

根值判别法（柯西）	若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$： 1．若$\rho<1$，收敛； 2．若$\rho>1$（或$\rho=+\infty$），发散； 3．若$\rho=1$，判别法失效。	u_n含n次幂（如$\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$）。
积分判别法	若$u_n=f(n),f(x)$在$[1,+\infty)$上非负、连续、单调递减，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同敛散。	u_n对应函数$f(x)$容易算出积分（如$\sum\frac{1}{n\ln n}$，积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$发散）。

特别注意：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$中如果$u_n<0$，可改写为$-\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$，进而按照正项级数进行判敛。

【例题 11.1.1 基础题】判定下列级数是否收敛：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$　　（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$　　（4）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

（5）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$　　（6）$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

（7）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$　　（8）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$

解：（1）方法一，比值审敛法：

在$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$中，$u_{n+1}=3^{n+1}\sin\frac{\pi}{4^{n+1}}$，$u_n=3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sin\frac{\pi}{4^{n+1}}}{3^n\sin\frac{\pi}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}3\frac{\frac{\pi}{4^{n+1}}}{\frac{\pi}{4^n}}=\frac{3}{4}<1$$

则根据比值审敛法可知原级数收敛。

方法二，比较审敛法（放缩形式）：

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}<\sum_{n=1}^{\infty}3^n(\frac{\pi}{4^n})$$

后者是收敛的等比级数，所以原级数收敛。

方法三，比较审敛法（极限形式）：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\sin\frac{\pi}{4^n}}{3^n\cdot\frac{\pi}{4^n}}=1$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}3^n(\frac{\pi}{4^n})$具有相同的敛散性，后者收敛，所以原级数收敛。

（2）在$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$中，$u_{n+1}=\frac{1}{n!}$，$u_n=\frac{1}{(n-1)!}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

根据比值审敛法可知原级数收敛。

（3）基于极限审敛法，可以先判断$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2n^{\frac{3}{2}}}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2n^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}=\frac{1}{2}$，其中$\frac{3}{2}>1$，原级数收敛。

也可用比较审敛法的极限形式：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$

故而$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$具有相同的敛散性，后者是$p=\frac{3}{2}$的 p 级数，从而收敛。

（4）可以根据函数的基本特点可知，$\ln(1+x)<x$，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

该级数大于调和级数，由比较审敛法可知它是发散的。

（5）根据比较审敛法的极限形式，可知该级数敛散性等同于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，所以发散。

（6）利用积分审敛法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$的敛散性等同于如下广义积分的敛散性：

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{+\infty}$$

该广义积分收敛，所以这个无穷级数也是收敛的。

（7）方法一：可求和的表达式，将无穷项转为有限项，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$，因而收敛

方法二：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

这等效于$p=\frac{3}{2}$的p级数，因而收敛。

（8）利用根值审敛法，

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}}=\frac{1}{2}$$

因此该级数收敛。

任意项级数

交错级数：形式为$\sum(-1)^{n+1}u_n$或$\sum(-1)^n u_n$，$u_n>0$，为交错级数。
莱布尼茨判别法：若交错级数$\sum(-1)^{n+1}u_n$满足：
1．u_n单调递减($u_{n+1}\le u_n$,n充分大时成立即可)；
2．$\lim_{n\to\infty}u_n=0$；
则级数收敛，且其和$S\le u_1$，余项$|r_n|\le u_{n+1}$。

任意项级数（u_n可正可负可零）的敛散性与绝对收敛、条件收敛
一绝对收敛与条件收敛的定义：
1．若$\sum|u_n|$收敛，则$\sum u_n$绝对收敛；
2．若$\sum u_n$收敛，但$\sum|u_n|$发散，则$\sum u_n$条件收敛。
核心结论：绝对收敛的级数必收敛。

判别步骤（任意项级数敛散性判断的标准流程）：
1．先判断$\sum|u_n|$的敛散性（用正项级数判别法）：若收敛，则$\sum u_n$绝对收敛；
2．若$\sum|u_n|$发散，再判断$\sum u_n$本身是否收敛（若为交错级数用莱布尼茨判别法，否则用＂部分和极限＂或＂级数性质＂）：若收敛，则为条件收敛；若发散，则$\sum u_n$发散。

【例题 .2 基础题】判断下列级数收敛情况，如果是收敛的，需要判断是绝对收敛还是条件收敛：

（1）$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\cdots$

（2）$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+\cdots$

（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$

解：（1）$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$u_{n+1}<u_n$，故该级数收敛；

取绝对值级数，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$是$p=\frac{1}{2}$的$p$级数，发散。所以原级数条件收敛。

（2）$u_n=\frac{1}{3\cdot 2^n}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$u_{n+1}<u_n$，故该级数收敛；

取绝对值级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{3}$，原级数属于绝对收敛。

（3）需要注意，该级数虽属于交错级数，且通项绝对值趋于 0，但是不满足莱布尼茨判敛条件当中的逐项递减：

1° n是奇数，则第n项的绝对值为

$$\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right|=-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)$$

第$(n+1)$项的绝对值为

$$\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right]\right|=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

第$(n+1)$项绝对值小于第n项的绝对值。

2° n是偶数，则第n项的绝对值为

$$\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right|=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

第$(n+1)$项的绝对值为

$$\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right]\right|=-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-1}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}\right)$$

此时第$(n+1)$项绝对值大于第n项的绝对值。不满足判定的充分条件。

可以考虑将原级数利用泰勒展开进行思考：

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}-\frac{1}{4n^2}+\cdots$$

其中第二部分属于发散的调和级数，而其他部分均收敛，所以原级数发散。

两个级数之间的关联：

1. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$两个都是绝对收敛的，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm b_n$也是绝对收敛的；
2. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$两个有一个绝对收敛、另一个条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm b_n$是条件收敛的；
3. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$两个有一个收敛、另一个发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm b_n$是发散的。
4. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$是收敛的，并且$a_n$和$b_n$同为正或同为负，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$各自收敛。

注意：

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$两个都条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm b_n$不一定绝对收敛或条件收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$两个都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm b_n$不一定收敛或发散。

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$是收敛的，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$不一定各自收敛。

例 1：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$。

例 2：$\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1))$。

级数内部运算规律：收敛就可结合；绝对收敛可交换。

一、正项级数（或者绝对收敛）：如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)$是收敛的

· 结合律：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$也收敛；

· 交换律：任意顺序重排，都不影响其和。

二：条件收敛：如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)$是条件收敛的（即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$是发散的）

结合律：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$也收敛；

不满足交换律：重排顺序后可能影响敛散性。

【例题 11.1.3 基础题】若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则：

A. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛

C. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$　　D. u_n发散

答案：B

解析：相关反例：$u_n=(-1)^n$

【例题 11.1.4 基础题】若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则：

A. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot u_{n+1}$收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$收敛

答案：D

解析：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{2}$

【例题 11.1.5 基础题】（2011 数学三）下列命题正确的是：

A. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

B. 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

C. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

D. 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

答案：A

解析：按照结合律、拆分律的特征即可明确。

【例题 11.1.6 基础题】（2016 数学三）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ （k为常数）______

A. 绝对收敛
B. 条件收敛
C. 发散
D. 收敛性与k有关

答案：A.
当我们遇到$\sin\infty$这类既非无穷大又不是无穷小的量时，应当及时采取放缩策略将其处理掉：

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|$$

而后者对应的正项级数是收敛的，所以原式是绝对收敛的。

【例题 11.1.7 拔高题】（2025 数学一）已知级数（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$，则

A.（1）与（2）均条件收敛
B.（1）条件收敛，（2）绝对收敛
C.（1）绝对收敛，（2）条件收敛
D.（1）与（2）均绝对收敛

【答案】B
【解析】首先判断级数（1）是否为绝对收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|$$

其中$\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\left|\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\right|=\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$

而通过比较审敛法的极限形式，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$的敛散性等价于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，而后者是发散的，所以该级数不满足绝对收敛。而选项中没有涉及级数（1）的发散，所以可以判断级数（1）是条件收敛的。
判断级数（2）是否为绝对收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right]\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

根据泰勒展开可得：

$$\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^5+\cdots=\frac{1}{3n^2}+\frac{2}{15\sqrt[3]{n^{10}}}+\cdots$$

不难判断出，该级数绝对收敛。

【例题 11.1.8 拔高题】（2025 数学三）已知 k 为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$(　).

A. 绝对收敛
B. 条件收敛
C. 发散

D. 敛散性与 k 的取值有关

【答案】B

【解析】根据泰勒展开公式，可得：

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}+\frac{k^3}{3n^6}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{n}-(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$$

该级数由一个条件收敛级数和一个绝对收敛级数相加组成，根据结论，可知该级数条件收敛。与k取值无关。

【例题 11.1.9 拔高题】（2023 数学一/数学三）已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$ ，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛是 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛的（ ）.

A. 充分必要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题需要利用一个绝对值不等式（这就是本题的难点）：

$$|b_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$$

可验证充分性（ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛推得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛）：

由于$a_n<b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$是正项级数，并且根据收敛级数的线性性质，可知： $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$也是收敛的。如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则有$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-a_n|+|a_n|$是收敛的。根据比较审敛法，得出$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛。

同理，可验证必要性（ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛推得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛），利用如下不等式：

$$|a_n|\le|a_n-b_n|+|b_n|$$

11.2 幂级数

收敛半径、收敛区间与收敛域

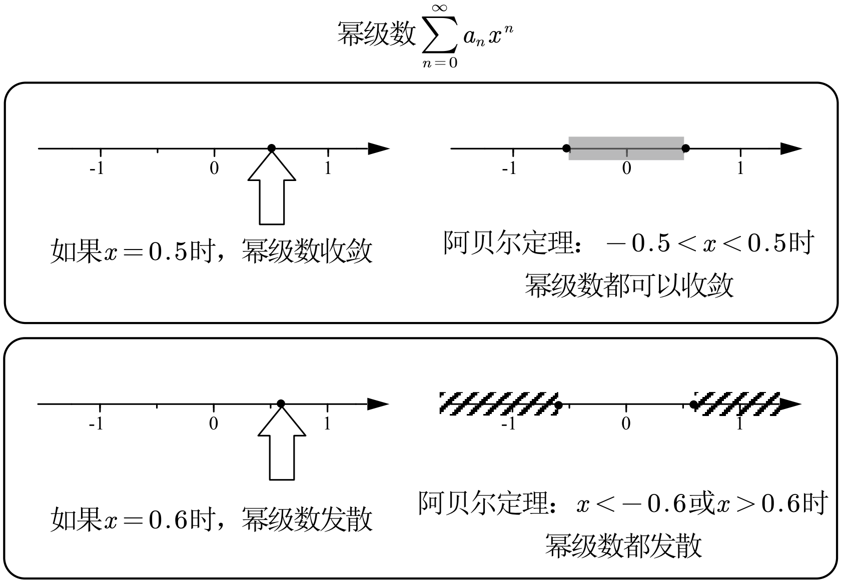
幂级数形式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

阿贝尔定理：对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$当$x=x_0$时收敛，那么当$|x|<|x_0|$时该级数一定是绝对收敛的；反之当$x=x_0$时发散，那么当$|x|>|x_0|$时该级数一定是发散的。

阿贝尔定理的解读：幂级数收敛对应的开区间应是关于 0 点对称的，而在区间的边界上则有可能出现绝对收敛、条件收敛、发散。

定义幂级数的收敛半径为$R(R\geqslant 0)$，即意味着当$x\in(-R,R)$时，该幂级数收敛。（当$R=0$时，说明该幂级数只有$x=0$时才能收敛；当$R=+\infty$时，说明该幂级数不论x取任意实数，都能收敛。）



幂级数的收敛域与收敛半径

收敛半径的定义：

对幂级数$\sum a_n x^n$，存在唯一的$R\in[0,+\infty]$，使得：

∘当$|x|<R$时，级数绝对收敛；

∘当$|x|>R$时，级数发散；

∘当$x=\pm R$时，级数敛散性需单独判断（收敛域的端点）。

R称为收敛半径，收敛域为$(-R,R)$加上收敛的端点（可能为空集、单端点、双端点）。

收敛半径的计算方法（核心公式）：

设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（比值法）或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$（根值法），则：

∘若$0<\rho<+\infty$，则$R=\frac{1}{\rho}$；

∘若$\rho=0$，则$R=+\infty$（收敛域为$\mathbb{R}$）；

∘若$\rho=+\infty$，则$R=0$（仅在$x=0$处收敛）。

收敛域的求解步骤：

1．计算收敛半径R（用比值法或根值法）；

2．分别判断$x=R$和$x=-R$处级数的敛散性（代入数值，用数项级数判别）；

3．综合端点敛散性，写出收敛域（如$[-R,R)$、$(-R,R]$、$[-R,R]$或$\{0\}$）。

【例题 11.2.1 基础题】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$的收敛域。

答案：首先求收敛半径，列出极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}}=\lim_{n\to+\infty}3\frac{n}{n+1}=3$$

可知收敛半径为$\frac{1}{3}$，收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。接下来分析$x=-\frac{1}{3}$和$x=\frac{1}{3}$时该级数是否收敛：

当$x=-\frac{1}{3}$时，代入级数可得数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，该级数属于交错级数，根据莱布尼茨定理可知它是收敛的；

当$x=\frac{1}{3}$时，代入级数可得数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，该级数属于$p=1$的$P$级数，是发散的。

综上所述，该幂级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

【例题 11.2.2 基础题】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^{2n}$的收敛域。

答案：本幂级数出现一个较为明显的特征：x的指数只有偶数次。像这种类型（$\boldsymbol{x}$的指数不连贯）需要按照特殊方法进行处理：

该级数的第n项记为：

$$u_n=\frac{1}{4^n}x^{2n}$$

第$(n+1)$项记为：

$$u_{n+1}=\frac{1}{4^{n+1}}x^{2n+2}$$

如果使该级数收敛，则应该成立以下不等式：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$$

于是可推得：

$$x^2<4$$

进而有：

$$-2<x<2$$

所以该幂级数的收敛半径为 2，收敛区间为$(-2,2)$。而当$x=-2$或$x=2$时，该幂级数都形成$\sum_{n=1}^{\infty}1$是发散的，所以幂级数的收敛域是$(-2,2)$。

【例题 11.2.3 基础题】已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot a^n}$在$x=-3$时条件收敛，求$a$的值（$a>0$）。

答案：对于幂级数，其在收敛区间内$(-R,R)$取值时一定是绝对收敛，而在收敛区间以外取值$(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$时该级数一定发散。

由此可知，只有可能在收敛区间边界上才有可能出现条件收敛，所以该幂级数的收敛半径为 3，收敛区间为$(-3,3)$。所以有以下极限产生：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot a^n}}=\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$$

可得$a=3$。

【例题 11.2.4 基础题】若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{na^n}$的收敛域为$[-3,1)$，则常数$a=$________.

【答案】2

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{na^n}$的收敛域为$[-3,1)$，说明其收敛半径为 2，于是存在以下极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}}{\frac{1}{na^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{a}\cdot\frac{n}{n+1}\right|=\left|\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{2}$$

由此解得$a=\pm2$。

当$a=-2$，则该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(-2)^n}$，求得收敛域为$(-3,1]$；

当$a=2$，则该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$，求得收敛域为$[-3,1)$。

所以可确定$a=2$。

【例题 11.2.5 基础题】设a,b为常数，且$a>0$，若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}(x-b)^n$的收敛区间为$(-3,5)$，则$a-b=$______.

【答案】$-\frac{3}{4}$

【解析】收敛区间宽度为 8，则收敛半径为 4，所以

$$-4<x-b<4$$
$$-3<x<5$$

得出$b=1$。收敛半径为 4，则$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}=a=\frac{1}{4}$，所以$a-b=-\frac{3}{4}$.

【例题 11.2.6 基础题】设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 8，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^n}{3^n}$的收敛半径为__________.

【答案】24

【解析】方法一：（以下做法在理论上有一个漏洞，请你注意观察）

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 8，说明存在极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8}$$

对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^n}{3^n}$，求极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{a_n}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{24}$$

可知该幂级数的收敛半径为 24.

方法二：

对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^n}{3^n}$ ，可将其变形为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{x}{3}\right)^n$ 。

设 $t=\frac{x}{3}$ ，则幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 。

由已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 8 ，即当 $|t|<8$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 收敛。

将 $t=\frac{x}{3}$ 代回，可得 $\left|\frac{x}{3}\right|<8$ ，解这个不等式：

$$|x|<24$$

所以，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 24。

【例题 11.2.7 基础题】（2020 数学三）设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为（　）.

A. $(-2,6)$

B. $(-3,1)$

C. $(-5,3)$

D. $(-17,15)$

【答案】B

【解析】对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$，设 $y=x-2$，则幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n$ 的收敛区间为 $y\in(-2-2,6-2)=(-4,4)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n$ 的收敛半径 $R_1=4$。

根据幂级数收敛半径的性质，若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ 的收敛半径为 R，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} y^n$ 的收敛半径也为 R。

令 $t=(x+1)^2$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$。由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 $R_2=4$，可知当 $|t|<4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 收敛。

将 $t=(x+1)^2$ 代回，可得 $|(x+1)^2|<4$，即 $(x+1)^2<4$。

解不等式 $(x+1)^2<4$：

$$-2<x+1<2$$
$$-3<x<1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 $(-3,1)$，答案选 B。

【例题 11.2.8 拔高题】（2022 数学一）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$ ，则 $a=$　　.

【答案】-1

【解析】在收敛域内该级数是角度收敛的，设 $u_n=\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$，根据比值审敛法，

则有：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\le 1$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-1-x}$$

即

$$\mathrm{e}^{-1-x}<1$$

进而解得：

$$-1-x<0, x>-1$$

对比可知$a=-1$.

幂级数的和函数

函数展开成幂级数：我们需要把握下列常见函数的泰勒级数，需要留意该级数的适用条件，即对应的收敛域：

- $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$
- $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$
- $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<+1)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^n+\cdots(-1<x<+1)$
- $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots(-1<x\leqslant+1)$

【例题 11.2.9 基础题】求值：$2-\frac{2^3}{2!}+\frac{2^5}{4!}-\frac{2^7}{6!}+\frac{2^9}{8!}\cdots$

解：设$S(x)=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\frac{x^9}{8!}\cdots$

$$\frac{S(x)}{x}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\cdots=\cos x$$

$S(x)=x\cos x$，原式=$S(2)=2\cos 2$

求和函数的步骤：

1．求收敛域：先确定和函数的定义域（即幂级数的收敛域）；

2．转化为基本级数：观察级数的系数a_n，通过逐项求导或逐项积分消去系数中的多项式因子，使其成为基本级数；

3．求基本级数的和：利用已知和函数写出转化后的级数和；

4．逆运算还原：通过积分或求导还原为原级数的和函数；

5．验证端点：若收敛域包含端点，需验证和函数在端点处的连续性（可通过左连续 / 右连续确定端点处的和）。

【例题 11.2.10 基础题】求下列幂级数对应的和函数：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

解：（1）设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$

解法 1：观察到这是一个公比为$2x$的等比数列，所以得到：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(2x)^n}{1-2x}=\frac{1}{1-2x}，\ |x|<\frac{1}{2}$$

解法 2：观察到该式$f(x)=1+(2x)+(2x)^2+\cdots$与$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots(-1<x<+1)$在形式上比较接近，观察两个等式的右侧可知后者中的$x$替换为$2x$就得到前者，所以：

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$$

（2）设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+\cdots$，而我们知道

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots(-1<x<+1)$$

可以得到：

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},(-1<x<1)$$

（3）设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$

根据$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots(-1<x<+1)$，观察这两个等式右侧可得出关系：

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$

所以有：

$$f(x)=\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C$$

而且有$f(0)=0$，于是得$C=0$，所以：$f(x)=-\ln(1-x)$，$(-1\leq x<1)$。

（4）设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots$，其收敛域为$[-1,1)$

我们这时候不论是对$f(x)$求导数还是求原函数，都没有与之匹配的简单幂级数。

但是我们可以进行一下“改造”：$xf(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$

这时候就有：

$$[xf(x)]'=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

于是可以得到：

$$xf(x)=\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C$$

且有$x=0$代入等号两侧，不难得到$C=0$，于是：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\ln(1-x)}{x}, & -1\leq x<0,0<x<1\\ 1, & x=0\end{cases}$$

【例题 11.2.11 中等题】（2021・数学一）设 $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=$

$1,2,\cdots$），求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】设$a_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$，$b_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$。

①求$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的收敛域以及和函数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$，根据比值审敛的方式，应当满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{-nx}}\right|<1,\qquad x>0$$

当$x=0$时，该级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}1$是发散的，由此可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的收敛域为$(0,+\infty)$。当$x>0$时，根据等比数列求和定理，可得其和函数为

$$S_1(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}(x>0)$$

②求$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的收敛域以及和函数

根据比值审敛的方式，为使级数收敛，应当有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}}\right|<1$$

则有$|x|<1$。而当$x=\pm1$时，该级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n(n+1)}$，仍收敛。结合①中关于$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的收敛域，所以得出$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$总体的收敛域为$(0,1]$。之后求$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的和函数：

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{2\times3}+\frac{x^4}{3\times4}+\cdots$$

连续两次求导数，可得：

$$S_2''(x)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

进行积分计算可得：

$$S_2'(x)=-\ln(1-x)$$

$$S_2(x)=(1-x)\ln(1-x)+x\ \ (0<x<1)$$

而我们需要求出收敛域$(0,1]$中的全部和函数，当$x=1$时，求$S_2(1)$有两种方式：

A. 利用连续性的性质：

$$S_2(1)=\lim_{x\to1}S_2(x)=1$$

B. 直接代入$x=1$求和：

$$S_2(1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$$

综上所述：

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}+(1-x)\ln(1-x)+x, & 0<x<1\\ \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}+1, & x=1\end{cases}$$

【例题 11.2.12 中等题】（2021·数学三）设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解．求：

（1）$y_n(x)$ ．
（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数．

【答案】（1）微分方程$y'-\frac{n+1}{x}y=0$中，利用线性齐次方程求解公式，可得：

$$y=Cx^{n+1}$$

由初始条件$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$，将$x=1,y=\frac{1}{n(n+1)}$代入$y=Cx^{n+1}$，得$C=\frac{1}{n(n+1)}$.

$$y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$$

（2）首先求得$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$的收敛域，记$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，则有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$$

所以收敛半径$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$，当$x=\pm1$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\pm1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

该级数都处于收敛状态。所以收敛域为$[-1,1]$。求和函数：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{2\times3}+\frac{x^4}{3\times4}+\cdots$$

*本题后续步骤与上一题（2021·数学一）非常相近，故省略该步骤：

$$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & -1\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

【例题 11.2.13 中等题】（2022·数学三）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$的收敛域以及和函数$S(x)$

解：首先获得收敛域，根据极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}}{\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}|x^2|<1$$

，解得$x<1$，因此收敛区间为$(-1,1)$

当$x=\pm1$时，该级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{1}{4^n(2n+1)}\right]$收敛，因此收敛域为$[-1,1]$

求和函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n},\ xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$[xf(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$xf(x)=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C\quad(x=0,C=0)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$$

$$xg(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$[xg(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{4}{4-x^2}$$

$$xg(x)=\int\frac{4}{4-x^2}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C\ (x=0,C=0)$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$$

综上所述：

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\arctan x+\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| & ,x\neq 0\\ 2 & ,x=0\end{cases}\quad x\in[-1,1]$$

【例题 11.2.14 中等题】（2023 数学三）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$

答案：$\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

解析：令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots$$

$$S(x)+S'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\mathrm{e}^x$$

解一阶线性微分方程$S'(x)+S(x)=\mathrm{e}^x$得$S(x)=C\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

由$S(0)=1$知，$C=\frac{1}{2}$. 则$S(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

【例题 11.2.15 中等题】（2024 数学一/数学三）已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$ ，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=(\quad)$.

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】将$\ln(2+x)$进行泰勒展开：

$$\ln(2+x)=\ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdots$$

$$\ln(2+x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}x^n$$

由此可得当$n>1$时，有

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n2^{2n}}=\frac{-1}{2n4^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2\times 4^n}$$

根据等比数列求和公式，可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2\times 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{6}$$

11.3 傅里叶级数（仅数学一）

傅里叶展开的基本原理

如果一个周期为$2l$的周期函数，满足下列两个条件（迪利克雷条件）：

（1）在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点；

（2）在一个周期内最多有有限个极值点。

那么这个周期函数可以被写成一系列三角函数的叠加，这样的叠加形式称为傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots)$$

【傅里叶级数常考点】收敛定理：傅里叶级数求和后，其取值$S(x)$有以下特点：

$$S(x)=\begin{cases}f(x) & ,x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & ,x\text{为}f(x)\text{的间断点}\end{cases}$$

【例题 11.3.1 基础题】设$f(x)$是周期为 2 的周期函数，它在$[0,2)$上的表达式为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$$

请将$f(x)$展开成傅里叶级数，并求得该级数在$x=1,x=1.5$处的取值情况。

解：周期长度为 2，所以$l=1$，有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$

$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_1^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_1^2\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

其中：$a_0=\int_1^2\cos 0\,\mathrm{d}x=1$

当$n>1$时：

$$a_n=\int_1^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_1^2=0$$

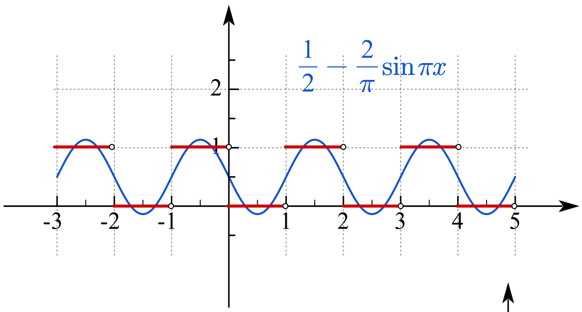
$$b_n=\int_1^2\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=-\left.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_1^2=\begin{cases}-\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

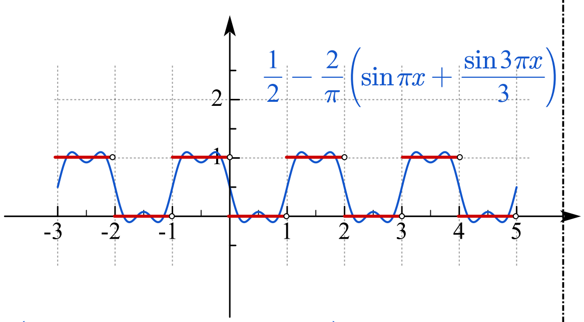
所以我们得到：

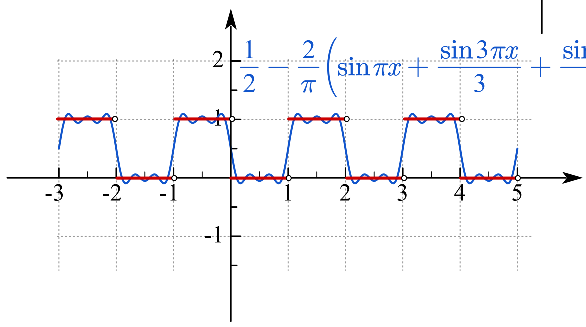
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)\\&=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\frac{\sin 5\pi x}{5}+\cdots\right)\end{aligned}$$

根据收敛定理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，且左右极限的平均数为 0.5，所以在 $x=1$ 处傅里叶级数之和为 0.5；$f(x)$ 在 $x=1.5$ 处连续，且取值为 1，所以在 $x=1.5$ 处傅里叶级数之和为 1.

我们可以作图来观察傅里叶展开的过程：







【例题 11.3.2 基础题】（2023·数学一· 5 分）设 $f(x)$ 为周期 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$________.

答案：0

解析：由展开形式可以判断将该函数进行偶延拓，所以该函数的展开系数求解为：

$$
\begin{aligned}
a_n&=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\cos n\pi x\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\sin n\pi x\right)\\
&=\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)
\end{aligned}
$$

因此 $a_{2n}=0$。

【例题 11.3.3 基础题】（2024 数学一）若函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, x\in[0,\pi]$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$.

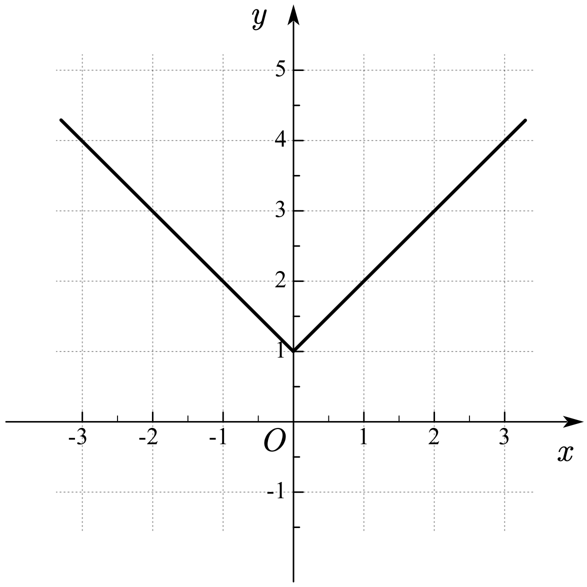
【答案】 $-\frac{1}{\pi}$

【解析】从题目展开的表达式可以获取两条信息：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, x\in[0,\pi]$$

①$f(x)$被展开成为周期是2π的函数；
②$f(x)$被展开成为偶函数。
所以根据偶函数延拓，可得$f(x)$在$[-\pi,\pi]$之间的定义为：

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\leq x\leq\pi\\ 1-x, & -\pi\leq x<0\end{cases}$$



计算a_n：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}(x+1)\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$a_{2n-1}=\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{\pi(2n-1)^2}=-\frac{1}{\pi}$$

【例题 11.3.4 基础题】（2025 数学一）已知函数 $f(x)=\begin{cases}0,0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ x^2,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(-\frac{7}{2}\right)=$

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】从题目展开的表达式可以获取两条信息：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$$

①$f(x)$被展开成为周期是 2 的函数；

②$f(x)$被展开成为奇函数。

根据周期性，可知 $S\left(-\frac{7}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)$。再根据傅里叶级数的收敛定理，可得

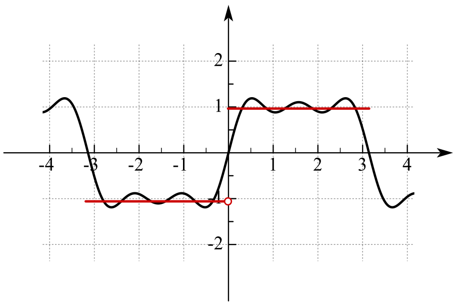
$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^{-}\right)+f\left(\frac{1}{2}^{+}\right)}{2}=\frac{1}{8}$$

傅里叶定理的解读

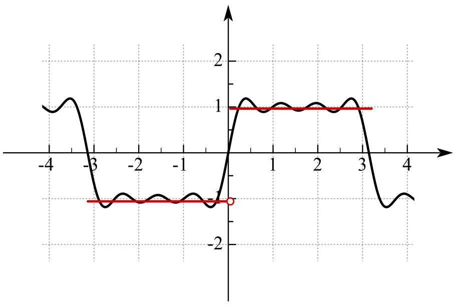
根据傅里叶级数的理论，周期为2π的周期函数$f(x)$，是可以被写作一系列三角函数叠加的：

$$f(x)=a_0+a_1\sin x+b_1\cos x+a_2\sin 2x+b_2\cos 2x+\cdots$$

比如下图：

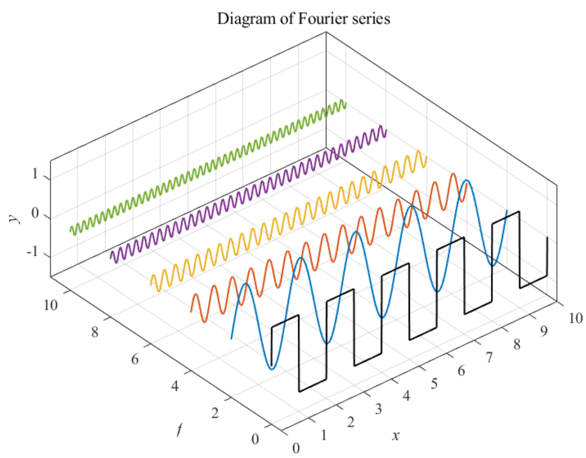


$$y=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{\pi}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{4}{\pi}\frac{\sin 5x}{5}$$

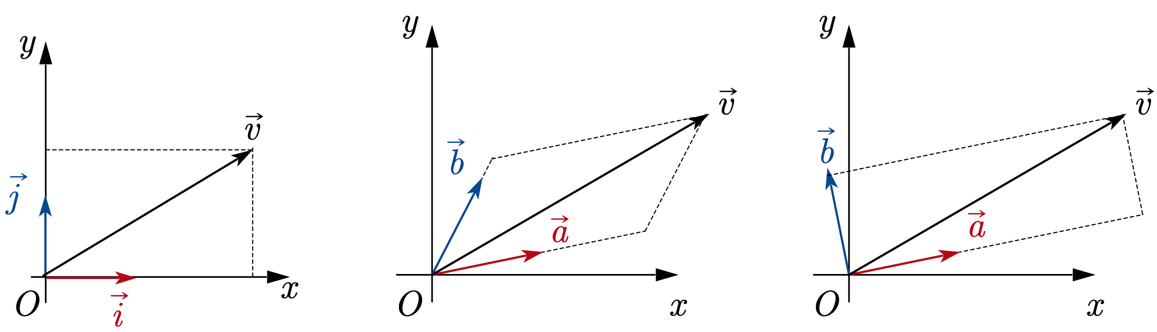


$$y=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{\pi}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{4}{\pi}\frac{\sin 5x}{5}+\frac{4}{\pi}\frac{\sin 7x}{7}$$

更直观一些可以看下图：



要想理解是怎么做到的，我们需要理解什么是三角函数的“正交性”：
先从二维的平面中向量的问题谈起：



我们早就知道的是：在平面中的向量$\vec{v}$可以用(x,y)这样的坐标来表示，其本质上的含义是：

$$\vec{v}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$$

我们也知道，在平面中任意两个不共线的向量$\vec{a},\vec{b}$加权组合，可以表示出该平面内的任意一个向量，称这样的向量组为该平面空间的"基"。

例如：向量$\vec{v}=(7,6),\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,4)$，设$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}$，即$(7,6)=m(3,1)+n(1,4)$，列方程：

$$\begin{cases}3m+n=7\\m+4n=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$$

除了解方程之外，我们有没有什么更快捷的方法呢？有，但是对$\vec{a},\vec{b}$也有一些要求，那就是它俩得**垂直**（如最右侧的图所示），这样的话$\vec{v}$在$\vec{a}$上的分量直接和$\vec{v}$在$\vec{a}$上的投影有关，在$\vec{b}$上的分量也只需要研究$\vec{v}$在$\vec{b}$上的投影。

根据数学公式：

$$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

左右两侧同时与$\vec{a}$进行点乘，可以得到：

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=m\vec{a}\cdot\vec{a}+n\vec{b}\cdot\vec{a}m=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

同理，左右同时和$\vec{b}$点乘，得到：$\vec{v}\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{b}\cdot\vec{b},n=\frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}$

我们举个例子，$\vec{v}=(4,7),\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-1,2)$，$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}$，求$(m,n)$

虽然列方程可以解决，但是我们观察到这里面$\vec{a},\vec{b}$是垂直的（两者点积为 0），所以直接套用公式：

$$m=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{(4,7)\cdot(2,1)}{(2,1)\cdot(2,1)}=3n=\frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\frac{(4,7)\cdot(-1,2)}{(-1,2)\cdot(-1,2)}=2$$

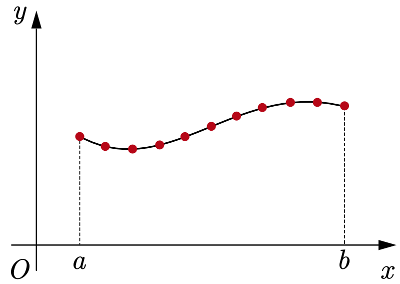
那么我们接下来就把这样的二维情形拓展到三维、n 维：

三维向量的表示方法(x,y,z)；
三维向量的点乘公式$(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$；
三维向量的模$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$；

n 维向量的表示方法$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$；
n 维向量的点乘公式$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\cdot(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\cdots x_ny_n$；
n 维向量的模$|\vec{v}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$；

我们不妨思考一个问题，函数可不可以被看作一种向量呢？比如我们研究一个定

义域在[a, b]上的连续函数，认为这段函数曲线是无数多个点构成的，把每个点对应的函数值作为向量的坐标：



$$f(x), x \in [a,b] \Rightarrow \left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots f(x_n)\right)$$

这样向量的维数是无穷大的，它们也有相应“点乘”的概念。设[a, b]上有两个函数$f(x), g(x)$，那么两者之间的点乘可以定义为：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

（注意：函数的点乘不可以直接定义为$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \cdots + f(x_n)g(x_n)$，这样计算结果是无穷大，没有讨论的意义了）

*把函数结合向量的特点进行研究，是《泛函分析》的一个非常重要的出发点，函数所处的空间分为希尔伯特空间、巴拿赫空间等。当然这是题外话，有兴趣的同学可以深入了解。

如果$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，我们可以称这两个函数是“正交”的（正交可以理解为垂直）。

好了，前面做了这么多铺垫，下面轮到三角函数登场，比如我们研究$[0,2\pi]$区间上的$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx$，要告诉各位的它们具有“相互垂直”的特点，因为其中任意两个不同的函数进行点乘得到的结果都是 0：

$$\int_0^{2\pi} \cos x \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos x(2\cos^2 x - 1)\mathrm{d}x = \left(\sin x - \frac{2}{3}\cos x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \sin 2x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos x(2\sin x \cos x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cos^3 x\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \cdots\cdots$$

而每个函数与自己点乘的结果都是π：

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos 2x \cos 2x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)\mathrm{d}x = \pi \cdots\cdots$$

所以函数$\{\cos nx, \sin nx | n \in N\}$可以看作$[0,2\pi]$区间上的正交的“基”。注意$\cos 0, \sin 0$也包含在这组基里面，它们同样符合上述相互垂直的特点，不同的是 cos0 自身点乘的结果为2π.

所以我们可以把$[0,2\pi]$上一个连续的函数$f(x)$做如下分解：

$$f(x)=a_0\cos 0x+b_0\sin 0x+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots f(x)$$
$$=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$

那么问题来了，怎么求这里面的系数$a_0,a_1,b_1,a_2,b_2\cdots$呢？

回想一下我们前面提到的二维平面中的例子：$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}$，如果$\vec{a},\vec{b}$是垂直的（两者点积为 0），则有$m=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}},n=\frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}$，所以受此启发，我们不难得出：

$$a_n=\frac{\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x}{\int_0^{2\pi}\cos nx\cos nx\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\,,n\in N$$

$$b_n=\frac{\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x}{\int_0^{2\pi}\sin nx\sin nx\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\,,n\in N_+$$

系数的问题解决了，那么我们不妨把这个想法拓展一下，不再局限于$[0,2\pi]$区间，对于一个长度为 $2l$ 的区间，我们可以直接把三角函数$\{\cos nx,\sin nx|n\in N\}$通过伸缩变换，使它们的周期变成 $2l$ 就好了，即$\left\{\cos\frac{\pi}{l}nx,\sin\frac{\pi}{l}nx|n\in N\right\}$，这里面三角函数仍然保持相互正交的关系，而和自身点乘的结果为 l.

$$\int_0^{2l}\cos\frac{\pi}{l}x\cdot\cos\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}x=\int_0^{2l}\sin\frac{\pi}{l}x\cdot\sin\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}x=\int_0^{2l}\cos\frac{\pi}{l}2x\cdot\cos\frac{\pi}{l}2x\mathrm{d}x=\cdots=l$$

于是我们得到了傅里叶级数的相关公式，在宽度为 $2l$ 的区间上将函数展开为如下形式：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)a_n$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,3,\cdots)b_n$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,3,\cdots)$$

以上就是关于傅里叶级数的推导过程。

接下来继续拓展我们的思路，傅里叶级数也是局限的，它仅适合于在一个宽度为 $2l$ 的有限区间上研究函数，或者是周期为 $2l$ 的函数。